UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES

Algunos aspectos algebraicos del full shift sobre grupos arbitrarios.

T E S I S

Q U E P A R A O B T E N E R E L T I T U L O D E

DOCTOR E N CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

Miguel Sánchez Álvarez

Director: Dr. Alonso Castillo Ramírez

JUNIO DE 2024

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
Centro Universitario de los Valles
Coordinación del Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas

Ameca, Jalisco a 11 de julio de 2023

Junta Académica del Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas

Presente:

En mi carácter de director del trabajo recepcional titulado: "Algunos aspectos algebraicos del full shift sobre grupos arbitrarios**"**, que presenta la el Mtro. MIGUEL SANCHEZ ALVAREZ*,* con código **215868414**, expongo que lo he revisado y que a mi juicio cumple con los requisitos metodológicos y de contenido, para que pueda ser sometida al examen recepcional correspondiente al Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas con Orientación en **Matemáticas**.

Por lo antes expuesto, me permito emitir el presente oficio de liberación del trabajo recepcional, con la finalidad de que pueda llevarse a cabo la defensa del mismo.

A t e n t a m e n t e:
"Piensa y Trabaja"
"2023, Año del fomento a la formación integral con una Red de centros y Sistemas Multitemáticos"

Ameca, Jalisco a 11 de julio de 2023

Dr. Alonso Castillo Ramírez
Profesor Investigador
Director de tesis.

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
Centro Universitario de los Valles
Coordinación del Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas Orientación Matemáticas

DCFM/MATE/11/2024

Dra. Suhey Ayala Ramírez
Coordinadora de Posgrados
CUVALLES
Presente

Por este medio se hace de su conocimiento que el trabajo de tesis titulado ***"Algunos aspectos algebraicos del full shift sobre grupos arbitrarios",*** presentado por el alumno **Mtro**. **Miguel Sánchez Álvarez** con código **215868414**, para obtener el grado académico de Doctor en Ciencias Físico Matemáticas con Orientación en Matemáticas **SÍ CUMPLE** con los requerimientos establecidos en el Reglamento General de Posgrado, para su presentación del examen de grado, según consta en el acta **DCFM-MATE/02/2024** de sesión de la Junta Académica, celebrada el 17 de mayo de 2024.

Por tal motivo, le informamos que el examen de grado se efectuará el día **viernes 7 de junio de 2024** a las **11:00 hrs** en la **Sala de Audiovisuales del Módulo V1 del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías.** Al respecto le solicitamos atentamente la elaboración del acta correspondiente. Asimismo, le comunico sobre la designación del jurado de examen de grado.

Dr. José Edgar Madriz Aguilar (Presidente)
Dr. Andrés García Sandoval (Secretario)
Dr. Alonso Castillo Ramírez (**Director**) (Vocal)
Dr. Osbaldo Mata Gutiérrez (Vocal)
Dr. Luguis de los Santos Baños (Vocal)

Le agradezco su atención y me pongo a sus órdenes para cualquier información adicional.

A t e n t a m e n t e:
"Piensa y Trabaja"
"30 años de la Autonomía de la Universidad de Guadalajara y de su organización en Red"
Ameca, Jalisco a 20 de mayo de 2024

Dr. Marciano Sanchez Tizapa
Coordinador del Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
C. UNIVERSITARIO
DE LOS VALLES
Coordinación de Doctorado
en Ciencias Físico Matemáticas

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
Centro Universitario de los Valles
Coordinación del Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas Orientación Matemáticas

DCFM/MATE/12/2024
ASUNTO: Carta de revisión anti-plagio
de trabajos recepcionales.

H. Miembros de la Junta Académica del
Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas
Orientación Matemáticas
Presente

Por este medio, me permito hacer de su conocimiento que el trabajo recepcional titulado **Algunos aspectos algebraicos del full shift sobre grupos arbitrarios**, realizado por el **Mtro. Miguel Sánchez Álvarez,** con código **215868414** del Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas con Orientación en Matemáticas, fue revisado de manera previa a su presentación y defensa ante el jurado correspondiente, a través de la herramienta anti-plagio denominada Turnitin.

Con base en la revisión realizada por el director del trabajo recepcional y el análisis del reporte de las similitudes encontradas por dicho software, no se identificaron elementos originales contenidos en alguna obra de terceros que se hagan pasar como propios por el autor del trabajo recepcional [1].

Por ello, se considera que el trabajo recepcional presentado es resultado del esfuerzo individual de su autor y que este empleó las normas y protocolos de citación pertinentes en su desarrollo, por lo cual, se presume que no infringe derechos intelectuales de terceros.

Sin otro particular por el momento, me despido con un cordial saludo.

A t e n t a m e n t e:

"Piensa y Trabaja"

"30 años de la Autonomía de la Universidad de Guadalajara y de su organización en Red"

Ameca, Jalisco a 20 de mayo de 2024

Dr. Marciano Sanchez Tizapa
Coordinador del Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas
Orientación Matemáticas.

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
C. UNIVERSITARIO
DE LOS VALLES
Coordinación de Doctorado
en Ciencias Físico Matemáticas

1 1Si bien el plagio como vulneración a los derechos intelectuales no se encuentra previsto en la legislación penal o en materia de propiedad intelectual, para efectos de su comprensión se recurre a la opinión doctrinista argentina Delia Lipszyc, quién señala se refiere al plagio como "el apoderamiento ideal de todos o de algunos elementos originales contenidos en la obra de otro autor presentándolo como propios". (Ref, Lipszyc Delia, cit. pos. Timal López Sandra y Sánchez Espinoza, Francisco. El plagio en el contexto del derecho de autor. Revista "Tla-melaua" de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (online), 2017, vol. 11, n 42, pp 48-66. Disponible en :http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S1870-69162017000200048&lng=es&nrm=iso

Agradecimientos

Estoy muy feliz de concluir este trabajo, habiendo vivido el placer de desarrollar matemática. Pero quiero aprovechar este espacio para agradecer por la confianza y el apoyo a personas que estimo.
En primer lugar a mi esposa Rosa López Menera, por su paciencia, amor y comprensión aún cuando en este periodo ella también estuvo terminando sus estudios de licenciatura.
Agradezco a mi asesor Alonso Castillo Ramírez por creer en mí desde siempre y por darme la oportunidad de participar en sus proyectos de investigación, pero al mismo tiempo permitirme desarrollar mis propias ideas. Su orientación experta y su motivación fueron vitales de principio a fin.
Agradecer a los revisores, el Dr. Felipe García Ramos, el Dr. Luguis de los Santos Baños, el Dr. Andrés García Sandoval y el Dr. José Edgar Madriz Aguilar, sus sugerencias y observaciones enriquecieron notablemente este trabajo.

Índice general

1. Introducción **7**

2. Preliminares: Sistemas dinámicos y autómatas celulares **13**
- 2.1. Sistemas dinámicos . . . 13
- 2.2. Espacios Shift . . . 19
  - 2.2.1. El espacio de configuraciones . . . 19
  - 2.2.2. Espacios Shift . . . 23
- 2.3. Autómatas celulares . . . 26

3. El número de configuraciones en el Full Shift con un periodo mínimo dado. **37**
- 3.1. Inversión de Möbius . . . 37
- 3.2. Configuraciones H-periódicas del Full Shift . . . 44
- 3.3. El número de configuraciones de periodo mínimo . . . 49
  - 3.3.1. Configuraciones periódicas cuando G es finitamente generado . . . 50
  - 3.3.2. Configuraciones con periodo normal . . . 53

4. Una nota sobre el grupo de automorfismos de ICA(A^G). **57**
- 4.1. Autómatas celulares generalizados . . . 57
- 4.2. Automorfismos de ICA(A^G) . . . 58

5. El grupo Aut(A^G) no es finitamente generado. **61**
- 5.1. Antecedentes . . . 61
- 5.2. Acotando el problema. . . . 64
- 5.3. Una estrategia general para demostrar que Aut(A^G) no es finitamente generado. . . 65
- 5.4. El grupo de automorfismos de $A^{\mathbb{Z}}$ no es finitamente generado. . . . 67
  - 5.4.1. Conceptos báscios de dinámica simbólica sobre $\mathbb{Z}$ . . . 67
  - 5.4.2. El teorema de intercambio de órbitas para el $\mathbb{Z}$-Full Shift . . . 69
- 5.5. Inducción y restricción de autómatas celulares . . . 72
- 5.6. El grupo Aut $\left(A^G\right)$ no es finitamente generado. . . . 75

6. Conclusiones y perspectivas **85**

Capítulo 1

Introducción

Un buen ejemplo de la riqueza de las estructuras algebraicas que emanan del estudio de los sistemas dinámicos lo encontramos en el grupo de automorfismos de un full G-shift.

Sea G un grupo y A un conjunto. El full G-shift con alfabeto A es el par (A^G, Σ) donde A^G es el espacio de configuraciones consistente en el conjunto de mapeos de G en A equipado con la topología producto de la topología discreta en A; mientras que Σ es la acción izquierda de G en A^G (conocida como acción shift) $\Sigma : G \times A^G \to A^G$ dada por $g \cdot x(h) = x(g^{-1}h)$, para toda $g, h \in G$. Es común referirnos al full G-shift con alfabeto A simplemente como el full shift A^G.

Un *endomorfismo* del full shift A^G es un mapeo continuo $\alpha : A^G \to A^G$ que es G-equivariante respecto a la acción shift; el conjunto de endomorfismos del full shift A^G es denotado por $\mathrm{End}(A^G)$. Si adicionalmente, tenemos que τ es un homeomorfismo entonces se denomina *automorfismo* del full shift A^G. El conjunto $\mathrm{End}(A^G)$ equipado con la composición de mapeos constituye un monoide y el grupo de unidades de este monoide es precisamente $\mathrm{Aut}(A^G)$.

Por otro lado, un *autómata celular* sobre el espacio de configuraciones A^G es un mapeo

$$\tau : A^G \to A^G$$

tal que existe un subconjunto finito $S \subseteq G$ (llamado *conjunto memoria* de τ), y un *mapeo local* $\mu : A^S \to A$ que satisfacen

$$\tau(x)(g) = \mu((g^{-1} \cdot x)\,|_S\,),$$

para toda $x \in A^G$, $g \in G$. Un autómata celular $\tau : A^G \to A^G$ se denomina *invertible* si el mapeo τ es biyectivo y su inverso τ^{-1} es también un autómata celular. Se puede demostrar que el conjunto de autómatas celulares sobre A^G denotado por $\mathrm{CA}(A^G)$ es un monoide con la composición de mapeos, mientras que su grupo de unidades denotado por $\mathrm{ICA}(A^G)$ es precisamente el grupo de autómata celulares invertibles.

Si bien, se puede demostrar que en general, todo autómata celular sobre A^G es un endomorfismo del full shift A^G, no todo endomorfismo es un autómata celular (ver ejemplo 2.3.4). Sin embargo, en su trabajo seminal [Hed69] de 1969 Gustav Arnold Hedlund presenta por primera vez el Teorema de Curtis-Lyndon-Hedlund el cual afirma (en su versión general) que si el conjunto A es finito, un mapeo $\tau : A^G \to A^G$ es un endomorfismo del full shift A^G si y sólo si es un autómata celular sobre A^G. En consecuencia, cuando el alfabeto A es finito tenemos que $\mathrm{CA}(A^G) = \mathrm{End}(A^G)$ y $\mathrm{ICA}(A^G) = \mathrm{Aut}(A^G)$, por ello en la literatura se utilizan ambas notaciones indistintamente.

Ahora bien, el marco clásico consiste en estudiar el full shift $A^{\mathbb{Z}}$ con una alfabeto A finito, donde una configuración $x \in A^{\mathbb{Z}}$ es pensada como sucesión bi-infinita $x = ...x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2...$ de símbolos en A. Entonces la acción shift en este caso se visualiza precisamente como traslaciones sobre estas sucesiones. En particular, el automorfismo $\sigma \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ dado por la asignación $x \mapsto 1{\cdot}x$ es conocido como el shift y se visualiza en la siguiente figura.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, "\sigma"] & = & \dots & x_{-3} & x_{-2} \arrow[dl] & x_{-1} \cdot \arrow[dl] & x_0 \arrow[dl] & x_1 \arrow[dl] & x_2 \arrow[dl] & x_3 \arrow[dl] & \dots \\
y = \sigma(x) & = & \dots & x_{-2} & x_{-1} & x_0 \cdot & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots
\end{tikzcd}$$

Una palabra sobre A de longitud n es una sucesión finita $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ de símbolos en A. Además, decimos que una palabra ocurre en $x \in A^G$ si existen enteros $i < j$ tales que $w = x_i x_{i+1} \cdots x_j$.

Un *subshift* es un subsistema $(X, \Sigma|_X)$ de algún full shift $A^{\mathbb{Z}}$ (i.e. X es un subconjunto cerrado de $A^{\mathbb{Z}}$ invariante bajo la acción shift). Una clase fundamental de subshifts son los shifts de tipo finito. Si $\mathcal{F}$ es un conjunto finito de palabras sobre el alfabeto A, el subshift $X_{\mathcal{F}} \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ que consta de configuraciones en las que no ocurre ninguna palabra de $\mathcal{F}$ se denomina *shift de tipo finito* con conjunto de palabras prohibidas $\mathcal{F}$. El full shift $A^{\mathbb{Z}}$ es un shift de tipo finito con conjunto de palabras prohibidas $\mathcal{F} = \varnothing$.

Una medida de la complejidad de un subshift $X \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ es la *entropía*, definida mediante

$$h(X) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log_2 |\mathcal{B}_n(X)|,$$

donde $\mathcal{B}_n(X)$ denota el conjunto de las palabras de longitud n que ocurren en puntos de X. Por ejemplo, para un full shift $A^{\mathbb{Z}}$ tenemos que $|\mathcal{B}_n(A^{\mathbb{Z}})| = |A|^n$, por lo que $h(A^{\mathbb{Z}}) = \log_2(|A|) > 0$.

Denotemos por $\mathcal{B}(X)$ el conjunto de palabras que ocurren en configuraciones de un subshift $X \subseteq A^{\mathbb{Z}}$. Entonces X se denomina *mezclante* (o mixing) si para todo par $u, v \in \mathcal{B}(X)$, existe un N tal que para cada $n \geq N$ hay una palabra $w \in \mathcal{B}_n(X)$ tal que $uwv \in \mathcal{B}(X)$. Claramente el full shift $A^{\mathbb{Z}}$ es mezclante.

En [Hed69] Hedlund también estudia el grupo $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ con A finito, advirtiendo algunas propiedades interesantes; entre otras cosas, mediante la construcción de *marcadores* demuestra que se trata de un grupo contable (no abeliano) que contiene una copia de cada grupo finito. En 1988 Mike Boyle, Douglas Lind y Daniel Rudolph adaptan la técnica de marcadores y generalizan esta observación en [BLR88] demostrando que para un shift mezclante de tipo finito con entropía positiva X, el grupo $\mathrm{Aut}(X)$ de automorfimos de X contiene copias isomorfas de cualquier grupo finito, del grupo $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ y del grupo libre en dos generadores $\mathbb{F}_2$. En 1990 Ki Hang Kim y Fred William Roush utilizan los marcadores en [KR90] para demostrar que $\mathrm{Aut}(X)$ contiene una copia isomorfa de $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ para todo A con $|A| \geq 2$, por lo cual el tipo de subgrupos que contiene $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ es independiente de A. Además, muestran que cualquier grupo contable, localmente finito y residualmente finito se puede encajar en $\mathrm{Aut}(X)$. Por otro lado, como ejemplo de otras propiedades cocidas de $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ tenemos que es un grupo residualmente finito y que no es promediable (no amenable) (ver [BS20]). Se sabe también que su centro es el grupo generado por el shift, es decir, $Z\left(\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})\right) = \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}$; este es el contenido del Teorema de Ryan publicado en 1975 por Patrick J. Ryan en [Rya72]. Una consecuencia del Teorema de Ryan es que $\mathrm{Aut}(A_2^{\mathbb{Z}}) \cong \mathrm{Aut}(A_4^{\mathbb{Z}})$, donde $A_i = \{1, 2, 3, ..., i\}$. Sin embargo, un ejemplo de lo difícil que puede ser abordar este grupo es que a la fecha no se sabe si $\mathrm{Aut}(A_2^{\mathbb{Z}}) \cong \mathrm{Aut}(A_3^{\mathbb{Z}})$. Todos estos datos nos da una idea de lo enorme, interesante y complejo que es $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$.

En [BLR88] se demuestra también que el grupo de automorfismos de un shift mezlante de tipo finito no es finitamente generado. Esto es sin duda otro ejemplo de la complejidad de $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$. Y a pesar de que el estudio del grupo de automorfismos de espacios shift sigue vigente (ver por ejemplo [FST19], [CG19], [HKS22], [Yan21], [Cas+23]) hasta donde sabemos no se ha publicado ningún análogo de este teorema para grupos diferentes de $\mathbb{Z}$. Sin embargo, Alonso Castillo Ramírez ha estudiado una variante del problema en [Cas22], y ha demostrado que el monoide $\mathrm{CA}(A^G)$ no es finitamente generado cuando A es finito y G perteneciente a familias interesantes de grupos, como lo son los grupos residualmente finitos, o los grupos localmente graduados, entre otros. La técnica utilizada muy interesante y explota el hecho de que para cada subgrupo normal $N \trianglelefteq G$ existe un epimorfismo de monoides $\Phi : \mathrm{CA}(A^G) \to \mathrm{CA}(A^{G/N})$. Sin embargo, revisamos en la sección 5.1 que la restricción de este epimorfismo al grupo $\mathrm{Aut}(A^G)$ no es en general un epimorfismo.

Lo descrito en el párrafo anterior motiva una de las cuestiones que abordamos en este trabajo:

Problema 1. *Sea G un grupo infinito y A un conjunto; determinar si el grupo $\mathrm{ICA}(A^G)$ de autómatas celulares invertibles sobre A^G es finitamente generado.*

Otro tema de interés en este trabajo son los puntos periódicos. Un punto $x \in A^{\mathbb{Z}}$ es periódico si $\sigma^n(x) = x$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y diremos que x es un punto de periodo n. El menor valor para n tal que se cumple esta relación se denomina perido mínimo de x. El Teorema de Morse-Hedlund sobre puntos periódicos nos dice que si x es un elemento en un $\mathbb{Z}$-shift con la propiedad de que para algún n el número de palabras de longitud n que ocurren en x es menor o igual que n, entonces x debe ser un punto periódico. Una versión dos-dimensional de este teorema es la Conjetura de Nivat, la cual afirma que si $x \in A^{\mathbb{Z}^2}$ tiene la propiedad de que existen naturales n y k para los cuales el número de $n \times k$ patrones en x es menor o igual a nk, entonces x tiene periodo no nulo, es decir, existe $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tal que $x_{\mathbf{n}+\mathbf{p}} = x_{\mathbf{n}}$ para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$. Si bien, se sabe que el análogo a dimensiones mayores a 2 falla, los intentos por demostrar esta conjetura han traido un desarrollo en el estudio de grupos de automorfimos de $\mathbb{Z}$-shifts con "complejidad baja".

El estudio de los puntos periódicos en el full $\mathbb{Z}$-shift conduce a problemas interesantes cuando ciertas propiedades se cumplen el caso uno dimenisonal se quieren extender al full shift sobre ; un ejemplo de ello es la Conjetura de Nivat.

Si H es un subgrupo de G, entonces una configuración $x \in \mathrm{Aut}(A^G)$ es H-periódica si su estabilizador $\mathrm{Stab}(x)$ contiene a H; el conjunto de configuraciones H-periódicas es denotado por $\mathrm{Fix}(H)$. Si ocurre que $\mathrm{Stab}(x) = H$, entonces diremos que la configuración x tiene *periodo mínimo* H (o *periodo fundamental* H). Denotaremos por $\Psi_H(G;A)$ el conjunto de coniguraciones de periodo fundamental H en el full shift A^G y por $\psi_H(G;A)$ la cardinalidad de $\Psi_H(G;A)$; sin embargo cuando G y A son claros del contexto simplemente escribimos Ψ_H y ψ_H respectivamente. Por ejemplo, para el full $\mathbb{Z}$-shift el punto $y = ...110110.110110110 \in A^{\mathbb{Z}}$ es una configuración $6\mathbb{Z}$-periódica, sin embargo $y \in \Psi_{3\mathbb{Z}}$. Los puntos periódicos de un sistema dinámico proporcionan información relevante, por ejemplo, la densidad de puntos periódicos es una condición necesaria para que un sistema dinámico sea caótico (ver [CC12]). Por otro lado, un argumento asociado a la acción del grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ en los subsistemas finitos $(\Psi_{n\mathbb{Z}}, \Sigma|_{\Psi_{n\mathbb{Z}}})$ es utilizado en [BLR88] para demostrar que el grupo $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ no es finitamente generado.

Una

En general si A es un conjunto y H es un subgrupo de G, existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto $A^{H/G}$ (de mapeos de H/G en A) y $\mathrm{Fix}(H)$ (ver Proposición 3.2.2). Por lo tanto si A es finito y H es un subgrupo de índice finito de G, entonces $\mathrm{Fix}(H)$ es finito y $|\mathrm{Fix}(H)| = |A|^{[G:H]}$. Además, es bien sabido que cada subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$ es de la forma $n\mathbb{Z}$ y $[\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}] = n$, por lo que en particular, en el escenario clásico tenemos que $|\mathrm{Fix}(n\mathbb{Z})| = |A|^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces es fácil contar las configuraciones H-periódicas. Sin embargo el conteo de configuraciones en $A^{\mathbb{Z}}$ de periodo fundamental $n\mathbb{Z}$ es ligeramente más delicado. Por ejemplo

$$\psi_{6\mathbb{Z}} = |\mathrm{Fix}(6\mathbb{Z})| - |\mathrm{Fix}(3\mathbb{Z})| - |\mathrm{Fix}(2\mathbb{Z})| + |\mathrm{Fix}(\mathbb{Z})|,$$

donde podemos observar que se ha seguido un razonamiento parecido al principio de inclusión-exclusión. El Teorema de inversión de Möbius (ver Proposición 3.1.2) generaliza el principio de inclusión-exclusión; de hecho, aplicando este principio se obtiene la siguiente fórmula bien conocida (ver § 6.3 de [LM21]):

$$\psi_{n\mathbb{Z}} = \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) |\mathrm{Fix}(k\mathbb{Z})|,$$

donde μ es la función de Möbius clásica del poset de números naturales $\mathbb{N}$ ordenados por divisibilidad la cual está dada por

$$\mu(m) = \begin{cases} 1, & \text{si } m = 1, \\ (-1)^k, & \text{si } m \text{ es el producto de } k \text{ primos distintos,} \\ 0, & \text{si } m \text{ tiene un divisor primo elevado cuadrado.} \end{cases}$$

La determinación del número de configuraciones periodo mínimo tiene relevancia en el estudio del grupo $\mathrm{Aut}(A^G)$. Sea $[H] := \{gHg^{-1} : g \in G\}$ la clase de conjungación de subgrupos de $H \leq G$. El número de G-órbitas cuyo estabilizador es conjugado a H:

$$\alpha_{[H]}(G; A) := |\{Gx : [G_x] = [H]\}|,$$

tiene interesantes conexiones con el grupo $\mathrm{Aut}(A^G)$ de automorfismos de A^G. Por ejemplo, para cada $\tau \in \mathrm{Aut}(A^G)$, $x \in A^G$, tenemos

$$g \cdot x = x \Leftrightarrow \tau(g \cdot x) = \tau(x) \Leftrightarrow g \cdot \tau(x) = \tau(x),$$

es decir, $G_x = G_{\tau(x)}$. Así, la $\mathrm{Aut}(A^G)$-órbita de x está contenida en $\{y \in A^G : \ G_y = G_x\}$ y se sigue que $\Psi_{G_x}(G; A)$ es una cota superior para la cardinalidad de la $\mathrm{Aut}(A^G)$-órbita de x. Por otro lado, si el grupo G es finito, la estructura de $\mathrm{Aut}(A^G)$ fue descrita en [CG19, Teorema 3] como

$$\mathrm{Aut}(A^G) \cong \prod_{i=1}^{r} ((N_G(H_i)/H_i) \wr \mathrm{Sym}_{\alpha_i}), \tag{1.0.1}$$

donde $[H_1], \ldots, [H_r]$ es la lista de todas las diferentes clases de conjugación de subgrupos de G, y $\alpha_i = \alpha_{[H_i]}(G; A)$, como se definió anteriormente. Por tanto, la estructura de $\mathrm{Aut}(A^G)$ depende completamente de los grupos cociente $N_G(H_i)/H_i$, que pueden calcularse fácilmente conociendo el grupo G, y de los enteros $\alpha_{[H_i]}(G; A)$, que dependen de $\Psi_H(G; A)$. En este sentido también buscamos abordar la siguiente cuestión:

Problema 2. *Sea G un grupo y A un conjunto finito. Dado un subgrupo $H \leq G$, determinar el número de configuraciones de periodo fundamental H. Para este propósito ¿será factible aplicar el Teorema de inversión de Möbius con $G \neq \mathbb{Z}$?*

Un autómata celular sobre $A^{\mathbb{Z}}$ con $A = \{0, 1\}$ y conjunto memoria $S = \{-1, 0, 1\}$ se denomina *autómata celular elemental*. Hay $2^{(2^3)} = 256$ autómatas celulares elementales. Un esquema para nombrar a dichos autómatas debida a Stephen Wolfram utiliza el siguiente criterio. Cada autómata celular elemental $\tau : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ está únicamente determinado por los ocho dígitos de la sucesión

$$\mu(111)\mu(110)\mu(101)\mu(100)\mu(011)\mu(010)\mu(001)\mu(000) \in A^8,$$

donde $\mu : A^S \to A$ es la regla local asociada. Esta secuencia de bits corresponde a la expansión binaria de un número entero en el intervalo $[0, 255]$, llamado el *número de Wolfram* de τ. Sin embargo, algunos de estos son equivalentes bajo cierta transformación geométrica del espacio de células. Por ejemplo la regla 110 reflejada a través del origen da lugar a la regla 124. Esta reflexión en realidad viene dada por la transformación $\tau_{rev} : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$, definida mediante

$$\tau_{rev}(x)(k) = x(-k),$$

y se denomina *la regla espejo.*

En [CG20] se demuestra que la conjugación por $\tau_{rev}(x)$ es un automorfismo de $\mathrm{CA}(A^{\mathbb{Z}})$.

Si bien, la conjugación de un autómata celular por un autómata celular invertible nos proporciona siempre un autómata celular, en [Epp15] se demuestra que, en cierto sentido, los únicos métodos generales para obtener un autómata celular a partir de otro mediante conjugación son esencialmente: conjugar por un autómata celular invertible o conjugar por la reflexión τ_{rev}.

Pero ¿qué tiene de especial τ_{rev}? Pues bien este mapeo es inducido por el único automorfismo no trivial del grupo aditivo $\mathbb{Z}$. Entonces es razonable pensar que, dado un grupo G y un conjunto finito A, cada automorfismo de G induzca un automorfismo del monoide $\mathrm{CA}(A^G)$. Por ello nos planteamos la siguiente cuestión:

Problema 3. *Sea G un grupo y A un conjunto finito. ¿Todo automorfismo del grupo G induce un automorfismo del monoide $\mathrm{CA}(A^G)$? De ser así, ¿cómo se comparan la estructuras de los grupos $\mathrm{Aut}(G)$ y $\mathrm{Aut}(\mathrm{CA}(A^G))$?*

La estructura de este trabajo consta de cinco capítulos. En el capítulo 2 introducimos conceptos y resultados elementales necesarios para el desarrollo del el resto de esta tesis. Abordamos temas básicos sobre sistemas dinámicos, espacios shift y autómatas celulares. A pesar de que está escrito en un estilo personal, la mayor parte de este material puede encontrarse en [Cec+10].

En el capítulo 3 abordamos el Problema 2 y demostramos que si G es un grupo finitamente generado y H es subgrupo de índice finito, entonces el número de configuraciones en A^G con período mínimo H puede calcularse utilizando la función de Möbius de la retícula de subgrupos de G de índice finito. Además, cuando H es un subgrupo normal, clasificamos todas las situaciones tales que el número de órbitas de G con periodo fundamental H es como máximo 10. Los resultados originales de esta capítulo se encuentran localizados en la sección 3.3; el resto del material en su mayor parte procede de las fuentes [Sta11] y [Cec+10].

Una respuesta al Problema 3 se trabaja en el capítulo 4 donde demostramos que cada automorfismo ϕ del grupo G determina un automorfimos del monoide $\mathrm{CA}(A^G)$ vía conjugación por el mapeo $\phi^\star : A^G \to A^G$ dado por la asignación $x \mapsto x \circ \phi$. Esto determina un homomorfismo de grupos $\Phi : \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{CA}(A^G))$, el cual aunado a la observación de que los automorfimos internos de $\mathrm{CA}(A^G)$ son inducidos por automorfimos de G que fijan su centro $Z(G)$ nos deja como corolario que, cuando G un grupo abeliano el grupo $Out(\mathrm{CA}(A^G))$ de automorfimos externos del monoide $\mathrm{CA}(A^G)$ contiene una copia isomorfa del grupo $\mathrm{Aut}(G)$. Estos resultados originales pueden consultarse en la sección 4.2.

Finalmente en el capítulo 5 abordamos el Problema 1, obteniendo los siguientes resultados originales. En la sección 5.3 presentamos un teorema (Teorema 5.3.1) que proporciona condiciones suficientes para que el grupo $\mathrm{Aut}(A^G)$ no sea finitamente generado, en el caso interesante, es decir, cuando G es finitamente generado y A un conjunto finito con $|A| \geq 2$. Aplicando este teorema, en la sección 5.6 logramos demostrar que el grupo $\mathrm{Aut}(A^\Gamma)$ donde $\Gamma = \mathbb{Z} \times G_2 \times \cdots \times G_d$ con $\{G_i\}_{i=2}^d$ una familia finita de grupos finitamente generados, no es finitamente generado. En consecuencia tenemos como corolario que $\mathrm{Aut}(A^G)$ no es finitamente generado cuando G es un grupo abeliano (Corolario 5.6.4). Es interesante que para este fin se aplicaron resultados sobre extensión y restricción de autómatas celulares y resultados de la emergente teoría de autómatas celulares generalizados.

Los resultados de los capítulos 3 y 4 han sido integrados en los artículos

i) Castillo-Ramirez, A., Sanchez-Alvarez, M. (2021). The number of configurations in the full shift with a given least period, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 1-10.

ii) Castillo-Ramirez, A., Sanchez-Alvarez, M., Vazquez-Aceves, A., Zaldivar-Corichi, A. (2023). A generalization of cellular automata over groups. Communications in Algebra, 51(7), 3114-3123.

respectivamente. Mientras que los resultados del capítulo 5 potencialmente podrían ocupar las páginas de un artículo en el futuro cercano.

Capítulo 2

Preliminares: Sistemas dinámicos y autómatas celulares

2.1. Sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos constituyen una rama de las matemáticas que consiste en el estudio de la información contenida en un grupo de transformaciones y de sus efectos sobre el espacio en el que actúa. En este trabajo estamos interesados en las acciones de grupos discretos.

Para un objeto X en una categoría C denotamos por $\mathrm{Aut}_C(X)$ al grupo de C-automorfismos de X (con respecto a la composición en la categoría C).

Definición 2.1.1. Sean G un grupo, C una categoría y X un objeto en C. Una **acción de** G **en X en la categoría** C es un homomorfismo de grupos $\theta : G \to \mathrm{Aut}_C(X)$. Además, a los C-automorfismos inducidos $\theta(g) : X \to X$ se les conoce como **transiciones**.

Equivalentemente, una acción de G en X consiste en una familia $(\varphi_g)_{g \in G}$ de automorfismos de X tales que

$$\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}.$$

Cuando C es la categoría de conjuntos, al considerar una acción por biyecciones $\theta : G \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Set}}(X)$ es usual usar la notación

$$g \cdot x := (\theta(g))(x)$$

para cualesquiera $g \in G$ y $x \in X$, de tal manera que podemos ver a θ como un mapeo $G \times X \to X$. Luego un mapeo $\theta : G \times X \to X$ define una G-acción si y sólo si

i) $e \cdot x = x, \forall x \in X$.

ii) $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x, \forall g, h \in G, \ \forall x \in X$.

Habitualmente esta notación se mantiene cuando G actúa en un objeto en una categoría donde los objetos son conjuntos con una estructura adicional, los morfismos son mapeos que preservan la estructura y la composición de morfismos es simplemente la composición de mapeos. Así podemos hablar, por ejemplo, de acciones por isometrías en un espacio métrico (*acciones isométricas*), o bien de acciones por homeomorfismos en un espacio topológico (*acciones continuas*).

Cuando consideramos una acción de G en X vía un homomorfismo θ, usaremos la notación $G \curvearrowright^{\theta} X$ o si el homomorfismo se entiende del contexto simplemente escribiremos $G \curvearrowright X$. Además, diremos que X es un **G-conjunto**.

Definición 2.1.2. Dada una acción $G \curvearrowright X$ y $x \in X$, definimos los siguientes conjuntos notables:

- La **órbita** de x es el conjunto $Gx := \{g \cdot x : g \in G\} \subseteq X$.
- $G_x := \{g \in G : g \cdot x = x\} \leq G$ es el **grupo de isotropía o estabilizador** de x.

Además, dados $A \subseteq X$ y $g \in G$, definimos $g \cdot A := \{g \cdot a : \ a \in A\}$.

Si dos puntos están en una misma órbita sus estabilizadores son conjugados.

Proposición 2.1.1. *Sea X un G-conjunto. Sean $x, y \in X$ tales que $y = g \cdot x$, para algún $g \in G$, entonces $G_y = gG_xg^{-1}$.*

Demostración. Observe que

$$
\begin{aligned}
G_y &= \{\gamma \in G : \ \gamma \cdot y = y\} \\
&= \{\gamma \in G : \ \gamma \cdot (g \cdot x) = g \cdot x\} \\
&= \{\gamma \in G : \ (g^{-1}\ \gamma g) \cdot x = x\} \\
&= \{\gamma \in G : \ g^{-1}\ \gamma g \in G_x\} \\
&= \{\gamma \in G : \ \exists \gamma^* \in G_x \text{ t.q. } \gamma^* = g^{-1}\ \gamma g\} \\
&= \{\gamma \in G : \ \exists \gamma^* \in G_x \text{ t.q. } g\gamma^* g^{-1} = \ \gamma\} \\
&= \{\gamma \in G : \ \gamma \in gG_xg^{-1}\} \\
&= gG_xg^{-1}.
\end{aligned}
$$

■

Definición 2.1.3. Una acción $G \curvearrowright^{\theta} X$ de se denomina:

- **acción trivial** si $G_x = G$ para todo $x \in X$.
- **acción libre o semiregular** si $G_x = \{e\}$ para todo $x \in X$.
- **acción efectiva o fiel** si $\mathrm{Ker}(\theta) = \{e\}$.
- **acción transitiva** si tiene una sola órbita.
- **acción es regular** si es libre y transitiva.

Definición 2.1.4. Sean X y Y dos G-conjuntos. Se dice que un mapeo $f : X \to Y$ es **G-equivariante** si $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ para todo $x \in X$ y todo $g \in G$.

Proposición 2.1.2. *Sea $f : X \to Y$ un mapeo equivariante de G-conjuntos.*

i) *$G_x \subseteq G_{f(x)}$ para cada $x \in X$.*

ii) *Si f es inyectivo, entonces $G_{f(x)} = G_x$ para todo $x \in X$.*

iii) Si f es un mapeo biyectivo, entonces el mapeo inverso f^{-1} es también G-equivariante. Además, para cada subgrupo $H \leq G$ los conjuntos $A := \{x \in X : G_x = H\}$ y $B := \{y \in Y : G_y = H\}$ están en correspondencia biyectiva.

iv) Sean $f : X \to X$ y $h : X \to X$ dos mapeos equivariantes del G-conjunto X. Entonces la composición $f \circ h$ es un mapeo G-equivariante.

Demostración. i)Dados $g \in G_x$ y $x \in X$, por G-equivarianza se tiene que $g \cdot f(x) = f(g \cdot x) = f(x)$, y por lo tanto $g \in G_{f(x)}$.

ii) Sea $x \in X$. Si f es inyectivo, para cada $g \in G_{f(x)}$ tenemos que $g \cdot f(x) = f(g \cdot x) = f(x)$, donde la igualdad $g \cdot x = x$ se sigue por inyectividad de f, así que $g \in G_x$.

iii) Para la primera parte observe que si $g \in G$ y $y \in Y$, entonces para algún $x \in X$ tenemos que $f(x) = y$ y

$$f^{-1}(g \cdot y) = f^{-1}(g \cdot f(x)) = f^{-1}(f(g \cdot x)) = g \cdot x = g \cdot f^{-1}(y).$$

Para la segunda parte observe que por ii) se tiene que $f(A) \subseteq B$, además ya que f^{-1} es G-equivariante, se sigue que $G_y = G_{f^{-1}(y)}$, para toda $y \in Y$, por lo cual $f^{-1}(B) \subseteq A$, lo por biyectividad de f es equivalente a $B \subseteq f(A)$. Por lo tanto, $f(A) = B$, es decir, A y B están en correspondencia biyectiva.

iv) Finalmente, para toda $g \in G$ y $x \in X$ tenemos que

$$(f \circ h)(g \cdot x) = f(h(g \cdot x)) = f(g \cdot h(x)) = g \cdot f(h(x)).$$

■

El siguiente teorema constituye una herramienta de conteo fundamental para este trabajo.

Teorema 2.1.1. (Órbita-Estabilizador) *Sea G un grupo que actúa en X. Para cualquier $x \in X$,*

$$|Gx| = [G : G_x],$$

donde $[G : G_x]$ denota el índice de G_x en G.

Demostración. Definamos un mapeo $\phi : Gx \to G/G_x$ mediante

$$\phi(g \cdot x) := gG_x, \ \forall g \cdot x \in Gx.$$

Observemos que

$$g \cdot x = h \cdot x \Leftrightarrow h^{-1}g \cdot x = x \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_x \Leftrightarrow gG_x = hG_x.$$

Esto implica que ϕ está bien definida y es inyectiva. Por otro lado, sea gG_x una clase lateral arbitraria de G/G_x. Es claro que su preimagen bajo ϕ es $g \cdot x$, pues $\phi(g \cdot x) = gG_x$, lo cual implica que ϕ es sobreyectiva. □

Definición 2.1.5. Dada una acción $G \curvearrowright X$, decimos que un subconjunto $Y \subseteq X$ es **G-invariante** si $g \cdot Y \subseteq Y$ para toda $g \in G$.

Proposición 2.1.3. *Sea X un G-conjunto y $A \subseteq X$ un conjunto G-invariante. Entonces:*

i) $g \cdot A = A$, para cada $g \in G$, *ii) A es unión de órbitas.*

Demostración. En primer lugar, tenemos que $g \cdot A \subseteq A$. Observe que para todo subconjunto $B \subseteq A$ se cumple $g \cdot B \subseteq g \cdot A$. Luego $A = g \cdot (g^{-1} \cdot (A)) \subseteq g \cdot A$ y se cumple i).
Ahora sea $\mathcal{O} := \bigcup_{a \in A} Ga$. Para cada $a \in A$, tenemos que $a \in Ga$, luego $a \in \mathcal{O}$ y $A \subseteq \mathcal{O}$. Por otro lado, si $x \in \mathcal{O}$, entonces existe $a \in A$ con $x \in Ga$; así que $x = g \cdot a$ para algún $g \in G$, pero al ser A conjunto G-invariante se tiene $g \cdot a = x \in A$. Por lo tanto, $\mathcal{O} \subseteq A$ y se sigue ii). ∎

Observación 2.1.1. Dada una acción $G \curvearrowright X$ vía $\theta : G \times X \to X$, la restricción de esta a un subconjunto invariante $A \subseteq X$ determina una acción de G en A vía $\theta|_A : G \times A \to A$.

Proposición 2.1.4. *Sea $G \curvearrowright X$ una acción sobre un espacio topológico X. Si para cada $g \in G$ las transiciones $\theta(g) : X \to X$ son mapeos continuos, entonces G actúa por homeomorfismos en X.*

Demostración. Para cada $g \in G$, $\theta(g)$ es un mapeo continuo con inverso continuo $\theta\left(g^{-1}\right)$. Luego cada $\theta(g)$ es un homeomorfismo y G es una acción por homeomorfismos en X. ∎

En virtud de la proposición anterior, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1.6. Una acción de un grupo G en un espacio topológico X se denomina **acción continua** si cada transición asociada es una mapeo continuo.

Definición 2.1.7. Un G**-sistema dinámico topológico** (o simplemente G**-sistema**) consiste en un par (X, T) donde X es un espacio topológico de Hausdorff compacto y $T : G \times X \to X$ es una acción continua de un grupo G.

En el sentido clásico, X es el *espacio fase*, G representa el tiempo y la acción $G \curvearrowright X$ representa la evolución temporal del sistema.

Sea (X, T) un G-sistema. De la observación 2.1.1 se desprende que al considerar un subconjunto $Y \subseteq X$ cerrado e invariante el par $(Y, T|_Y)$ es un G-sistema dinámico en sí mismo. En efecto, pues un subconjunto cerrado de un espacio compacto, es un espacio compacto en sí mismo, un subespacio de Hausdorff es de Hausdorff nuevamente y además, podemos considerar la correspondiente restricción de la métrica para tener que Y es espacio métrico en sí mismo.

Definición 2.1.8. Un ***subsistema*** de un G-sistema (X, T) es un subconjunto $Y \subseteq X$ cerrado e invariante equipado con la acción $T|_Y : G \times Y \to Y$.

Definición 2.1.9. Decimos que un G-sistema (X, T) es:

> ***Topológicamente transitivo*** si dados cualesquiera dos subconjuntos abiertos (no vacíos) V y W de X, existe un elemento $g \in G$ tal que $gV \cap W \neq \varnothing$.
>
> ***Topológicamente mezclante (mixing)*** si G es infinito y para cualesquiera conjuntos abiertos no vacíos $U, V \subseteq X$ hay un conjunto finito $F \subset G$ tal que $sU \cap V \neq \varnothing$ para todo $s \in G \setminus F$.
>
> ***Minimal*** si X no posee subsistemas propios.

En un G-sistema topológicamente transitivo la acción mueve cada abierto de X lo suficiente como para que eventualmente intersecte a cualquier otro, es decir, cada abierto no vacío de X visita a cualquier otro abierto. En consecuencia por lo menos un punto visita cada abierto de X bajo a acción de G. Además, en los sistemas minimales la acción subyacente hace que cada punto del espacio X visite todo conjunto abierto del espacio.

Proposición 2.1.5. *Sea* (X, T) *un* G*-sistema. Entonces*

i) (X, T) *es transitivo si y sólo si existe* $x \in X$ *cuya órbita es densa.*

ii) (X, T) *es minimal si y sólo si cada* $x \in X$ *tiene órbita densa.*

Los principales indicadores de la complejidad de un sistema dinámico tienen en común que son propiedades de la estructura general de las órbitas. Por ello si queremos considerar mapeos entre G-sistemas que puedan ser considerados como morfismos debemos perdirles que preserven la estructura de órbitas, es decir, que conmute con las respectivas acciones de G.

Definición 2.1.10. Sean (X, T) y (Y, S) G-sistemas dinámicos. Un mapeo continuo $\phi : X \to Y$ que es G-equivarinate se denomina **morfismo topológico**. Un morfismo topológico sobreyectivo $\phi : X \twoheadrightarrow Y$ se denomina **semiconjugación**; en estas circunstancias diremos que (Y, S) es un **factor topológico** de (X, T) o bien también podemos decir que (X, T) es una extensión topológica de (Y, S). Si adicionalmente ϕ es homeomorfismo, lo llamaremos **conjungación topológica** y diremos que (X, T) es **topológicamente conjugado** a (Y, S).

Dos G-sistemas son esencialmente el mismo si son topológicamente conjugados; mientras que la existencia de una semiconjugación $\phi : X \twoheadrightarrow Y$ intuitivamente nos dice que la dinámica de (X, T) es al menos tan complicada como la de (Y, S).

Definición 2.1.11. El conjunto de **endomorfismos** de un G-sistema (X, T) se define como

$$\mathrm{End}(X) := \{\sigma : X \to X \ : \ \sigma \text{ es un morfismo topológico}\}.$$

Proposición 2.1.6. *Sea* (X, T) *un* G*-sistema. El conjunto* $\mathrm{End}(X)$ *es un monoide bajo la composición de mapeos.*

Demostración. En primer lugar, la composición de dos endomorfismos es un endomorfismo, pues por iv) de la Proposición 2.1.2 tenemos que la composición de dos mapeos G-equivariantes es nuevamente G-equivariante; mientras que la composición de dos mapeos continuos es mapeo continuo. Por otro lado, el mapeo identidad Id_X es un homeomorfismo que conmuta con cualquier acción. Además, la composición de mapeos es asociativa. ■

El grupo de unidades del monoide de endomorfimsos de un G-sistema (X, T), denotado por $\mathrm{Aut}(X, T)$ (o bien $\mathrm{Aut}(X)$ si la acción se sobreentiende del contexto) está constituido de las autoconjugaciones de (X, T), es decir, de los homemorfismos de X en sí mismo que son G-equivariantes.

Definición 2.1.12. Dado un G-sistema (X, T), a los elementos de $\mathrm{Aut}(X, T)$ se les denomina **automorfismos** de (X, T).

Finalmente, observamos que todo endomorfismo biyectivo $\phi : X \to X$ es de hecho un automorfismo.

Proposición 2.1.7. *Sea X un G-sistema. Si $\phi : X \to X$ es un endomorfismo biyectivo, entonces $\phi \in Aut(X)$.*

Demostración. Ya que $\phi : X \to X$ es biyectivo posee un mapeo inverso $\phi^{-1} : X \to X$. En primer lugar, ϕ^{-1} es G-equivariante por iv) de la Proposición 2.1.2. Además, toda biyección continua de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff posee inversa continua; X al ser G-sistema es un espacio compacto de Hausdorff lo cual significa que $\phi^{-1} : X \to X$ es continua. ■

El grupo de automorfismos es un invariante de los G-espacios.

Proposición 2.1.8. *Sean (X, T), (Y, S) G-sistemas conjugados. Entonces* $\mathrm{Aut}(X) \cong \mathrm{Aut}(Y)$.

Demostración. Sea $\alpha : X \to Y$ una conjugación entre los G-sistemas (X, T) y (Y, S). Entonces podemos definir el mapeo $\overline{\alpha} : \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(Y)$ dado por $\overline{\alpha}(\sigma) := \alpha \circ \sigma \circ \alpha^{-1}$, para cada $\sigma \in \mathrm{Aut}(X)$. En primer lugar la composición de homeomorfismos es un homeomorfismo y la composición de mapeos G-equivariantes es un mapeo G-equivariante por iv) de la Proposición 2.1.2, luego $\overline{\alpha}$ está bien definido. Entonces dados $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{Aut}(X)$, se cumplen las relaciones:

$$\overline{\alpha}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \alpha \circ (\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \alpha^{-1} = (\alpha \circ \sigma_1 \circ \alpha^{-1}) \circ (\alpha \circ \sigma_2 \circ \alpha^{-1}) = \overline{\alpha}(\sigma_1)\overline{\alpha}(\sigma_2),$$

lo cual significa que $\overline{\alpha}$ es un homomorfismo de grupos. Pero la composición de mapeos biyectivos es un mapeo biyectivo, luego $\overline{\alpha}$ es un isomorfismo de grupos. ■

Proposición 2.1.9. *Sean (X, T) un G-sistema, H un subgrupo de G y $F(H) := \{x \in X : \ h \cdot x = x \text{ para todo } h \in H\}$. Si $\phi : X \to X$ es un morfismo topológico entonces $\phi(F(H)) \subseteq F(H)$. Si además ϕ es biyectivo, entonces $\phi(F(H)) = F(H)$.*

Demostración. Por G-equivarianza de ϕ, para todo $h \in H$ y $y \in F(H)$ tenemos que

$$h \cdot \phi(y) = \phi(h \cdot y) = \phi(y),$$

es decir, $\phi(y) \in F(H)$. Luego $\phi(F(H)) \subseteq F(H)$. Si adicionalmente tenemos que ϕ es biyectivo, entonces ϕ^{-1} es morfismo topológico y $\phi^{-1}(F(H)) \subseteq F(H)$ lo cual implica que $F(H) \subseteq \phi(F(H))$ y se sigue que $\phi(F(H)) = F(H)$. ■

2.2. Espacios Shift

2.2.1. El espacio de configuraciones

Consideremos un grupo G, un conjunto no vacío A. El conjunto de mapeos de G en A, lo denotamos mediante A^G, es decir

$$A^G = \prod_{g \in G} A = \{x : G \to A\}.$$

El conjunto A se denomina **alfabeto**, y sus elementos son llamados las letras, o estados. El grupo G es llamado **universo**: el conjunto de células.

Si equipamos cada factor A de A^G con la topología discreta (todos los subconjuntos de A son abiertos, y por lo tanto, también cerrados) y a A^G con la topología producto asociada, esta última es llamada la *topología prodiscreta*. El espacio topológico A^G se denomina **espacio de configuraciones**. Así, una configuración consiste en un mapeo que asigna estados a cada célula en el grupo, la cual usualmente pensamos como una sucesión de elementos de A indizados por los elementos de G, es decir, una configuración $x \in A^G$ tiene la forma $x = (x_g : g \in G)$.

Como sabemos, por definición de topología producto las proyecciones $\pi_g : A^G \to A$, dadas por $\pi_g(x) = x(g)$ son continuas para cada $g \in G$. En nuestro contexto, a los elementos de la subbase de la topología prodiscreta los llamaremos **cilindros elementales**. El cilindro elemental que consiste en el conjunto de configuraciones cuya "coordenada" $g \in G$ es $a \in A$, lo denotaremos mediante

$$C(g, a) = \pi_g^{-1}(\{a\}) = \left\{x \in A^G : \ x(g) = a\right\}.$$

Ya que la preimagen de un conjunto abierto (resp. cerrado) bajo un mapeo continuo es un conjunto abierto (resp. cerrado), se sigue que los cilindros elementales son conjuntos abiertos y cerrados en A^G.

Dados $x \in A^G$ y un subconjunto finito $\Omega \subseteq G$, una vecindad (o entorno) $V(x, \Omega)$ de x está dada por aquellas configuraciones que coinciden con x en Ω, es decir,

$$V(x, \Omega) = \left\{y \in A^G : x|_\Omega = y|_\Omega\right\}.$$

Observe que $V(x, \Omega)$ es en efecto un abierto de A^G, pues $V(x, \Omega) = \bigcap_{g \in \Omega} C\left(g, x(g)\right)$.

Proposición 2.2.1. *Sea G un grupo y A un conjunto con $|A| \geq 2$. Las siguientes afirmaciones se cumplen en la topología prodiscreta de A^G.*

1) Las proyecciones $\pi_g : A^G \to A$, definidas como $\pi_g(x) = x(g)$ son continuas.

2) La colección

$$\{\pi_g^{-1}(\{a\}) \ : \ g \in G, a \in A\},$$

donde $\pi_g^{-1}(\{a\}) = \{x \in A^G \ : \ x(g) = a\}$ es una subbase de la topología.

3) La colección

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{g \in G} U_g \ : \ U_g \subseteq A \text{ y } U_g \neq A \textit{ sólo para un número finito de elementos en } G \right\}.$$

es una base para la topología prodiscreta de A^G.

4) A^G es un espacio de Hausdorff.

5) A^G tiene la topología disreta si y sólo si G es finito.

6) A^G es compacto si y sólo si A es finito.

7) Un mapeo $\tau : A^G \to A^G$ es continuo si y sólo si $\pi_g \circ \tau : A^G \to A$ es continuo para toda $g \in G$.

Demostración. La topología producto en A^G es la topología inicial respecto a la colección de mapeos de proyección, es decir, la topología más gruesa en A^G tal que cada mapeo de proyección $\pi_g : A^G \to A$ es continuo, por lo cual se cumple 1).

Ahora, la topología prodiscreta es la mínima topología tal que los mapeos de proyección $\pi_g : A^G \to A$ son continuos, sin embargo, esto curre si y sólo si la preimagen de cada elemento de una subbase para la topología discreta de A bajo π_g es abierto para cada $g \in G$. La familia de conjuntos unipuntuales de A es una subbase para la topología discreta de A. Luego, la topología prodiscreta es la menor topología que contiene al conjunto $\mathcal{S}^* := \{\pi_g^{-1}(\{a\}) \ : \ a \in A, g \in G\}$, es decir, S es una subbase para la topología prodiscreta sobre A^G y se cumple 2).

En vista de que cada factor A de A^G está equipado con la topología discreta, se sigue que cualquier conjunto $U \subseteq A$ es abierto en A. Así, la colección $\mathcal{S} := \{\pi_g^{-1}(U) \ : \ U \subseteq A, g \in G\}$ es una subbase para la topología prodiscreta.

Para ver que se cumple 3) primero observe que

$$\pi_{g_*}^{-1}(U) = \{x \in A^G \ : \ x(g_*) \in U\} = \prod_{g \in G \setminus \{g_*\}} A_g \times U,$$

así que una intersección finita de elementos en $\mathcal{S}$ tiene la forma

$$\pi_{g_1}^{-1}(U_1) \cap \pi_{g_2}^{-1}(U_2) \cap \cdots \cap \pi_{g_n}^{-1}(U_n) = \prod_{g \in G \setminus \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}} A_g \times U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n,$$

donde los U_i son subconjuntos de A. Es decir que cada básico es de la forma

$$\prod_{g \in G} U_g$$

donde $U_g \neq A$ sólo para un número finito de elementos de G.

El espacio discreto A es espacio de Hausdorff. Así la proposición 4) se desprende del hecho de que el producto arbitrario de espacios de Hausdorff es en sí mismo un espacio de Hausdorff.

Para ver que se cumple 5) primero supongamos que A^G tienen la topología discreta y que G es infinito. Entonces cada conjunto unipuntual es abierto, más específicamente, un básico. Así, dado $x \in A^G$, podemos escribir el abierto $\{x\}$ mediante $\{x\} = \bigcap_{g_i \in F} \pi_{g_i}^{-1}(U_i)$ con $F \subset G$ finito. Por otro lado, podemos elegir $g^* \in G \setminus F$ y $a \in A \setminus x(g^*)$ para construir $y \in A^G$ con $y(g) = x(g)$ para cada $g \in F$ y $y(g^*) = a$. Luego $x \neq y$, pero $y \in \bigcap_{g_i \in F} \pi_{g_i}^{-1}(U_i)$ lo cual es una contradicción.

Ahora si G es finito, entonces para cada $x \in A^G$, el conjunto $\{x\} = \bigcap_{g \in G} \pi_g^{-1}(x|_{\{g\}})$ es una intersección finita de elementos en $\mathcal{S}^*$ y por lo tanto abierto en la topología prodiscreta de A^G.

Por el teorema de Tychonoff A^G compacto si y sólo si A es compacto. Sin embargo, es sabido que un espacio discreto es compacto si y sólo si es finito. Por lo tanto, se sigue 6). Para ver que se cumple 7) observemos que si $\tau : A^G \to A^G$ es continuo, también lo es $\pi_g \circ \tau : A^G \to A$ pues la composición de mapeos continuos es mapeo continuo. Por otro lado, si asumimos que $\pi_g \circ \tau$ es continuo, podemos considerar la subbase $\mathcal{S} := \{\pi_g^{-1}(U) \ : \ U \subseteq A, g \in G\}$ y ver que $\tau^{-1}(\pi_g^{-1}(U)) = (\pi_g \circ \tau)^{-1}(U)$ es conjunto abierto. Por lo cual τ es continuo pues la preimagen de cada elemento de la subbase $\mathcal{S}$ bajo τ es abierto. ■

Como veremos a continuación el espacio de configuraciones A^G es metrizable. Para ello vamos a considerar un orden en G inducido por una enumeración $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de G. Así, dada una configuración $x \in A^G$ será útil considerar la notación $x(g) = x_g$ y para dos enteros $k_1 \leq k_2$ definamos $x_{[g_{k_1}, g_{k_2}]} := \{x_{g_i} : k_1 \leq i \leq k_2\}$.

Proposición 2.2.2. *Sea G un grupo contable y A un conjunto finito. Sea $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una enumeración de G. La función $d : A^G \times A^G \to \mathbb{R}_0^+$ dada por*

$$d(x,y) = \begin{cases} 2^{-\min\{|k| \ : \ x_{g_k} \neq y_{g_k}\}} & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

es una métrica para el espacio de configuraciones A^G.

Demostración. Consideremos dos configuraciones $x, y \in A^G$. Por definición de d, si $x = y$, entonces $d(x,y) = 0$. Además, la función $f(t) = 2^{-t}$ es estrictamente positiva, por lo que $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
La función d está bien definida cuando $x \neq y$. En efecto, pues si $x \neq y$ que el conjunto $\{k : x_{g_k} \neq y_{g_k}\}$ es no vacío (de lo contrario $x = y$), y por lo tanto $\{|k| : x_{g_k} \neq y_{g_k}\}$ tampoco. Entonces, por el principio de buena ordenación de $\mathbb{N}$, $\{|k| : x_{g_k} \neq y_{g_k}\}$ posee un elemento mínimo N y $d(x,y) = 2^{-N} \in \mathbb{R}^+$. Por otro lado, ya que la relación $\neq$ es simétrica se sigue que $d(x,y) = d(y,x)$.

Consideremos ahora $x, y, z \in A^G$ distintos dos a dos (en otro caso es claro que la desigualdad del triángulo se cumple). Sean

$$N_{xy} = \min\{|k| : x_{g_k} \neq y_{g_k}\},\ N_{yz} = \min\{|k| : y_{g_k} \neq z_{g_k}\} \text{ y } N_{xz} = \min\{|k| : x_{g_k} \neq z_{g_k}\}.$$

Hagamos $N = \min\{N_{xy}, N_{yz}\}$.

Si $N = 0$, entonces $d(x,y) = 1$ o $d(y,z) = 1$. Además, como la distancia máxima entre dos configuraciones es 1, se tiene que $d(x,y) + d(y,z) \geq 1 \geq d(x,z)$.

Si $N > 0$, entonces $x_{[g_{-i}, g_i]} = y_{[g_{-i}, g_i]}$ y $y_{[g_{-i}, g_i]} = z_{[g_{-i}, g_i]}$ para $|i| < N$. Así que, por transitividad $x_{[g_{-N+1}, g_{N-1}]} = z_{[g_{-N+1}, g_{N-1}]}$; pero esto significa que $N_{xz} \geq N$, además como la función $f(t) = 2^{-t}$ es monótona decreciente, se cumple

$$d(x,z) = 2^{-N_{xz}} \leq 2^{-N} \leq 2^{-N_{xy}} + 2^{-N_{yz}} = d(x,y) + d(y,z).$$

■

La métrica introducida en la Proposición 2.2.2 se denomina **métrica usual** para el espacio de configuraciones. La idea intuitiva es que dos sucesiones están cerca si coinciden en un gran tramo(simétrico) de coordenadas alrededor de la coordenada cero. Además, veremos que esta métrica es compatible con la topología prodiscreta de X. Como primer paso veamos cómo caracterizar los entornos de nuestro espacio métrico (X, d).

Proposición 2.2.3. *Sea G un grupo contable y A un conjunto finito. Sean $\varepsilon > 0$ y x, y dos puntos del espacio de configuraciones A^G. Se tiene que*

$$d(x,y) < \varepsilon \Leftrightarrow x_{g_{\left[-\left\lfloor \log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor, \left\lfloor \log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor\right]}} = y_{g_{\left[-\left\lfloor \log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor, \left\lfloor \log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor\right]}}.$$

En particular para cualquier $K \in \mathbb{N}$, tenemos que $d(x,y) < 2^{-K}$ si y sólo si $x_{g_{[-K,K]}} = y_{g_{[-K,K]}}$

Demostración. Observe que

$$\begin{aligned}
d(x,y) < \varepsilon &\Leftrightarrow 2^{-\text{mín}\{|k| \ : \ x_k \neq y_k\}} < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \text{mín}\{|k| \ : \ x_k \neq y_k\} > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \\
&\Leftrightarrow \text{mín}\{|k| \ : \ x_k \neq y_k\} > \left\lfloor \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor \\
&\Leftrightarrow x_{g_{\left[-\left\lfloor \log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor, \left\lfloor \log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor\right]}} = y_{g_{\left[-\left\lfloor \log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor, \left\lfloor \log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor\right]}},
\end{aligned}$$

en partiular, si $K \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
d(x,y) < 2^{-K} &\Leftrightarrow x_{g_{\left[-\left\lfloor \log_2 \frac{1}{2^{-K}}\right\rfloor, \left\lfloor \log_2 \frac{1}{2^{-K}}\right\rfloor\right]}} = y_{g_{\left[-\left\lfloor \log_2 \frac{1}{2^{-K}}\right\rfloor, \left\lfloor \log_2 \frac{1}{2^{-K}}\right\rfloor\right]}} \\
&\Leftrightarrow x_{g_{[-K,K]}} = y_{g_{[-K,K]}}
\end{aligned}$$

■

En vista de lo anterior, la bola de radio r con centro en $x \in A^G$ (el conjunto de configuraciones que se encuentran a una distancia menor que ε de la configuración x) es el conjunto

$$B_r(x) := \left\{ y \in A^G : x_{g_{\left[-\left\lfloor \log_2 \frac{1}{r}\right\rfloor, \left\lfloor \log_2 \frac{1}{r}\right\rfloor\right]}} = y_{g_{\left[-\left\lfloor \log_2 \frac{1}{r}\right\rfloor, \left\lfloor \log_2 \frac{1}{r}\right\rfloor\right]}} \right\}.$$

De la proposición anterior se sigue que la colección $\mathcal{B}_M := \{B_r(x) \ : \ r = 2^{-k}, \ k \in \mathbb{N}, x \in A^G\}$ constituyen una base para la topología τ_d inducida por la métrica d.

Proposición 2.2.4. *La métrica usual para el espacio de configuraciones es compatible con la topología prodiscreta.*

Demostración. Denotemos por S_A es la colección de subconjuntos unipuntutales de A y sea $B_{2^{-k}}(x) \in \mathcal{B}_M$. Tenemos que $B_{2^{-k}}(x) = \{y \in A^G \ : \ x_{g_{[-k,k]}} = y_{g_{[-k,k]}}\} = \prod_{g_i \in G} U_{g_i}$, donde $U_{g_i} \in S_A$ para $i \in [-k, k]$, y $U_{g_i} = A$ en otro caso. Luego $B_{2^{-k}}(x)$ es un elemento de la base dada en la proposición 2.2.1-3) para la topología prodiscreta de A^G.

Sean B un elemento de la base para la topología prodiscreta de A^G dada en la proposición 2.2.1-3) y $x \in B$. Entonces $B = \prod_{g_i \in G} U_{g_i}$ donde $U_{g_i} \subset A$ y $U_{g_i} \neq A$ sólo para $i \in F$, $F \subseteq \mathbb{Z}$ finito.

Sea $m := \text{máx}\{|i| \mid i \in F\}$. Entonces $B_{2^{-m}}(x)$ es un elemento de $\mathcal{B}_M$ tal que $x \in B_{2^{-m}}(x) \subset B$. El resultado se sigue de la proposición 1.36 de [DFS18]. ■

Un espacio topológico X se denomina *totalmente disconexo* si los únicos subconjuntos conexos no vacíos son los conjuntos unipuntuales. Por otro lado, diremos que X es un *espacio perfecto* si todos sus puntos son puntos de acumulación; en un espacio métrico esto equivale a pedir que exista una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \neq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Proposición 2.2.5. *El espacio de configuraciones A^G es totalmente disconexo. Además, si G es infinito y $|A| \geq 2$ entonces es un conjunto perfecto.*

Demostración. Sea $C \subset A^G$ no vacío y conexo. Entonces por continuidad de los mapeos de proyección, para cada $g \in G$, $\pi_g(C)$ es un subconjunto de A no vacío y conexo. Ya que A es totalmente disconexo, para cada $g \in G$ el conjunto $\pi_g(C)$ es un conjunto unipuntual. Por lo tanto, C mismo es unipuntual y A^G es totalmente disconexo.

Ahora supongamos que G es infinito y que $|A| \geq 2$. Sea $\{g_n\} \subseteq G$ una sucesión de distintos elementos de G. Dado $x \in A^G$ construimos una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A^G a partir de las relaciones

$$x_n(g) = \begin{cases} x(g), & \text{si } g \neq g_n \\ a \neq x(g), & \text{si } g = g_n \end{cases}$$

es claro que $\{x_n\}$ converge a x. Así todo elemento de A^G es punto límite y A^G es perfecto. ■

El **conjunto triádico de Cantor** es un espacio topológico que consiste en el conjunto

$$\mathfrak{C}_{1/3} := \left\{ x \in [0,1] : \; x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n} \text{ para } \alpha_n \in \{0,2\} \right\}$$

equipado con la topología de subespacio de la topología usual de $\mathbb{R}$. Un **conjunto de Cantor** es un espacio topológico homeomorfo al conjunto triádico de Cantor.

Corolario 2.2.1. *Si G es infinito y A un conjunto finito con $|A| \geq 2$, entonces el espacio de configuraciones A^G es un conjunto de Cantor.*

Demostración. Ya que A es finito por 6) de la Proposición 2.2.1 tenemos que A^G es compacto; por la Proposición 2.2.2 es un espacio metrizable; además, la Proposición 2.2.5 nos asegura que es totalmente disconexo y ya que G es infinito y $|A| \geq 2$ también tenemos que es un espacio perfecto. Finalmente, todo espacio compacto, metrizable, perfecto y totalmente disconexo es un conjunto de Cantor (ver capítulo 12 de [Moi13]). ■

2.2.2. Espacios Shift

Ahora vamos a considerar una acción continua $G \curvearrowright A^G$ conocida como el G***-shift*** en A^G o simplemente la ***acción de traslación*** en A^G; dicha acción se describe acontinuación.

Dados $x \in A^G$ y $g \in G$ podemos definir una acción izquierda $G \curvearrowright A^G$ como el mapeo $\Sigma : G \times A^G \to A^G$ dado por

$$g \cdot x(h) = x(g^{-1}h), \quad \forall h \in G.$$

En efecto, para todo $g_1, g_2, h \in G$, se satisfacen las relaciones

i) $e \cdot x(h) = x(eh) = x(h)$,

ii) $g_2 \cdot (g_1 \cdot x)(h) = (g_1 \cdot x)(g_2^{-1}h) = x(g_1^{-1}g_2^{-1}h) = x((g_1g_2)^{-1}h) = (g_1g_2) \cdot x(h)$.

Un par de propiedades destacables de la acción de traslación son las siguientes.

Proposición 2.2.6. *La acción de traslación $G \curvearrowright A^G$ es continua. Además, si $|A| > 1$, entonces esta acción es fiel.*

Demostración. Para $g \in G$ considere la transición asociada $\varphi_g : A^G \to A^G$ dado por $\varphi_g(x) = g \cdot x$. Observe que el mapeo $\pi_h \circ \varphi_g = \pi_{g^{-1}h}$ es continuo en A^G para todo $h \in G$. En consecuencia, φ_g es continuo. Sean $g_0 \in G \setminus \{e\}$ y $a, b \in A$ con $a \neq b$. Consideremos la configuración $x \in A^G$ dada por

$$x(g) = \begin{cases} a, & \text{si } g = e \\ b, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $g_0 \cdot x(e) = x(g_0^{-1}) = b$ y $x(e) = a$, lo cual implica que $g_0 \cdot x \neq x$. Luego la acción es fiel. ■

Como hemos revisado anteriormente, el espacio de configuraciones A^G es metrizable y por lo tanto un espacio de Hausdorff; mas para un alfabeto finito A, tenemos que A^G es compacto. Así para un conjunto finito A podemos equipar al espacio de configuraciones A^G con el G-shift y obtenemos un G-sistema (A^G, σ) conocido como el ***full G-shift*** (o el ***G-shift Bernoulli***) con alfabeto asociado A o simplemente el ***full shift*** A^G.

Los subsistemas de un full G-shift se denominan subshifts, equivalentemente, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.2.1. Un ***subshift*** de (A^G, σ) es un subconjunto cerrado y G-invariante de A^G.

Sea F un subconjunto finito de G. Un **patrón** con soporte F es un elemento $p \in A^F$. La intersección finita de cilindros elementales genera un tipo de conjunto conocido como *cilindro*. Un subconjunto $C_F^{\mathcal{P}} \subset A^G$ se denomina **cilindro** si existe un subconjunto finito $F \subset G$ y un conjunto de patrones $\mathcal{P} \subset A^F$ tales que

$$C_F^{\mathcal{P}} = \{x \in A^G : \ x|_F \in \mathcal{P}\}.$$

Proposición 2.2.7. *Sean G un grupo y A un conjunto finito. Los cilindros del espacio de configuraciones A^G satisfacen las siguientes propiedades.*

i) El complemento de un cilindro es también un cilindro.

ii) La unión o intersección de dos cilindros es un cilindro.

iii) Los cilindros son conjuntos abiertos y cerrados.

iv) El conjunto de todos los cilindros forma una base para la topología prodiscreta de A^G.

Demostración. Sea $C_F^{\mathcal{P}}$ un cilindro. Observe que el conjunto de patrones A^F es finito. Luego, su complemento es $(C_F^{\mathcal{P}})^c = \{x \in A^G : \ x|_F \in A^F \setminus \mathcal{P}\}$, el cual, es de nueva cuenta un cilindro pues $A^F \setminus \mathcal{P}$ es finito y se cumple i). Ahora consideremos dos cilindros $C_{F_1}^{\mathcal{P}_1}$ y $C_{F_2}^{\mathcal{P}_2}$. Observe que $C_{F_1}^{\mathcal{P}_1} \cup C_{F_2}^{\mathcal{P}_2} = C_{F_1 \cup F_2}^{\mathcal{P}}$, donde $\mathcal{P} = \{p \in A^{F_1 \cup F_2} \mid p|_{F_1} \in \mathcal{P}_1 \text{ o } p|_{F_2} \in \mathcal{P}_2\}$ y $C_{F_1}^{\mathcal{P}_1} \cap C_{F_2}^{\mathcal{P}_2} = C_{F_1 \cup F_2}^{\mathcal{P}^*}$, donde $\mathcal{P}^* = \{p \in A^{F_1 \cup F_2} \mid p|_{F_1} \in \mathcal{P}_1 \text{ y } p|_{F_2} \in \mathcal{P}_2\}$ y se cumple ii). Sea $\mathcal{P} = \{p_i : F \to A \mid i = 1, ..., n\}$ un conjunto de patrones con soporte finito F. Entonces

$$C_F^{\mathcal{P}} = \bigcup_{p_i \in \mathcal{P}} C_F^{\{p_i\}} = \bigcup_{p_i \in \mathcal{P}} \left[\bigcap_{h \in F} \pi_h^{-1}(p_i(h)) \right],$$

de donde se desprende que $C_F^{\mathcal{P}}$ es abierto al ser unión de básicos. Además, por i) sabemos que el complemento de un cilindro es otro cilindro por lo cual cada cilindro es conjunto abierto y cerrado en la topología prodiscreta. Finalmente, consideremos la base $\mathcal{B}$ de la proposición 2.2.1 y denotemos por $\mathcal{C}$ la familia de cilindros sobre A^G. Si $B \in \mathcal{B}$, entonces existe un conjunto $F \subsetneq A$ tal que $B = \prod_{g \in G} U_g$ con $U_g \subseteq A$ y $U_g \neq A$ para $g \in F$. Consideremos la familia de mapeos $\mathcal{P} = \{f : F \to \bigcup_{g \in F} U_g \mid f(g) \in U_g \ \forall g \in F\}$. Entonces $C_F^{\mathcal{P}} = B$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, de donde se desprende que $\mathcal{C}$ es base para la para la topología prodiscreta de A^G. ■

Sea $\mathcal{P} \subseteq A^F$ un conjunto de patrones con soporte F. Para cada $p \in \mathcal{P}$ definamos el mapeo $p^g : gF \to A$ dado por $p^g(gf) = p(f)$ para cada $f \in F$ y sea $\mathcal{P}^g := \{p^g : gF \to A \mid p \in \mathcal{P}\}$. Diremos que el patrón p **ocurre** en $x \in A^G$, lo cual denotamos mediante $p \sqsubset x$ si existe $g \in G$ tal que tal que $x \in C_{gF}^{\{p^g\}}$.

Lema 2.2.1. *Sea $\mathcal{P} \subseteq A^F$ un conjunto de patrones con soporte F y para un $g \in G$ fijo consideremos el conjunto $g \cdot C_F^{\mathcal{P}} = \{x \in A^G : \ x = g \cdot y$ para algún $y \in C_F^{\mathcal{P}}\}$. Tenemos que $C_{gF}^{\mathcal{P}^g} = g \cdot C_F^{\mathcal{P}}$.*

Demostración. Observe que si $x \in g \cdot C_F^{\mathcal{P}}$ y $f \in F$, entonces se cumplen las relaciones $x(gf) = y(g^{-1}gf) = y(f) = p(f)$ para algún $p \in \mathcal{P}$, y por lo tanto, $x|_{gF} \in \mathcal{P}^g$. Luego $g \cdot C_F^{\mathcal{P}} \subseteq C_{gF}^{\mathcal{P}^g}$.
Por otro lado, si tomamos $z \in C_{gF}^{\mathcal{P}^g}$, tenemos que existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p^g(gf) = z(gf) = p(f)$ para cdada $f \in F$. Consideremos la configuración $y \in A^G$ dada por $y(h) = z(gh)$ para cada $h \in G$. Para cada $f \in F$ se cumple $p(f) = z(gf) = y(g^{-1}gf) = y(f)$, es decir, $y|_F = p$ y $y \in C_F^{\mathcal{P}}$. En vista de que $z(h) = y(g^{-1}h)$ para cada $h \in G$, tenemos que $z = g \cdot y$ y $z \in g \cdot C_F^{\mathcal{P}}$. Luego $C_{gF}^{\mathcal{P}^g} \subseteq g \cdot C_F^{\mathcal{P}}$. ■

Proposición 2.2.8. *Sea $X \subseteq A^G$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) X es un subshift.

ii) Existe un conjunto de patrones $\mathcal{F} = \{p_i : F_i \to A : i \in I\}$ tal que $X = A^G \setminus \bigcup_{\substack{p_i \in \mathcal{F},\\ g \in G}} C_{gF_i}^{\{p_i^g\}}$.

Demostración. Primero supongamos que se cumple i), es decir, que X es un subshift. Entonces X es el complemento de un abierto. Así, según iv) de la proposición 2.2.7 podemos escribir $X = A^G \setminus \bigcup_{i \in I} C_{F_i}^{\mathcal{P}_i}$. Pero X es conjunto G-invariante, así que, si $x \in X$ entonces

$$\begin{aligned} g \cdot x \in X \ \forall g \in G &\Leftrightarrow g \cdot x \notin C_{F_i}^{\mathcal{P}_i} \quad \forall (g,i) \in G \times I \\ &\Leftrightarrow x|_{g^{-1}F_i} \notin \mathcal{P}_i^{g^{-1}} \ \forall (g,i) \in G \times I \\ &\Leftrightarrow x \notin C_{g^{-1}F_i}^{\mathcal{P}_i^{g^{-1}}} \quad \forall (g,i) \in G \times I \\ &\Leftrightarrow x \notin C_{gF_i}^{\mathcal{P}_i^{g}} \ \forall (g,i) \in G \times I, \end{aligned}$$

es decir, $x \in X = A^G \setminus \bigcup_{\substack{i\in I,\\ g\in G}} C_{gF_i}^{\mathcal{P}_i^g}$. Haciendo $\mathcal{F} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{P}_i$ y observando que $\bigcup_{\substack{i\in I,\\ g\in G}} C_{gF_i}^{\mathcal{P}_i^g} = \bigcup_{\substack{p_i\in \mathcal{F},\\ g\in G}} C_{gF_i}^{\{p_i^g\}}$ tenemos que i) implica ii).

Ahora supongamos que se cumple ii). Es claro que X es cerrado al ser el complemento de un abierto. Además si $x \in \bigcup_{\substack{p_i\in \mathcal{F},\\ g\in G}} C_{gF_i}^{\{p_i^g\}}$, existe $(p_j, h) \in \mathcal{F} \times G$ tal que $x \in C_{hF_j}^{\{p_j^h\}}$ y por el Lema 2.2.1 tenemos que para toda $\alpha \in G$ tenemos que $\alpha \cdot x \in \alpha \cdot C_{hF_j}^{\{p_j^h\}} = C_{\alpha hF_j}^{\{p_j^{\alpha h}\}} \subseteq \bigcup_{\substack{p_i\in \mathcal{F},\\ g\in G}} C_{gF_i}^{\{p_i^g\}}$. Por lo tanto, $\bigcup_{\substack{p_i\in \mathcal{F},\\ g\in G}} C_{gF_i}^{\{p_i^g\}}$ es conjunto G-invariante. Luego, X es conjunto G-invariante al ser el complemento de un conjunto G-invariante. Al ser X cerrado y G-invariante se sigue que X es subshift y ii) implica i). $\blacksquare$

Corolario 2.2.2. *Sea $X \subseteq A^G$ un subshift. Existe un conjunto de patrones $\mathcal{F}$ tales que $X = \{x \in^G : p \sqsubset x$ implica $p \notin \mathcal{F}\}$.*

El corolario 2.2.2 nos dice que todo subshift X se puede caracterizar especificando un conjunto de patrones $\mathcal{F}$ que no pueden ocurrir en sus configuraciones, por ello denominados a $\mathcal{F}$ conjunto de **patrones prohibidos**.

Definición 2.2.2. Un subshift $X \subseteq A^G$ se denomina **subshift de tipo finito** si el conjunto de patrones prohibidos que lo define es finito.

2.3. Autómatas celulares

Ahora vamos a describir los morfismos topológicos entre full shifts. Si bien, los morfismos topológicos entre dos full G-shifts A^G y B^G son simplemente mapeos $A^G \to B^G$ continuos que son G-equivariantes, cuando A y B son finitos poseen una caracterización combinatoria vía el teorema de Curtis-Lyndon-Hedlund.

Sean A y B dos conjuntos y consideremos los correspondientes G-full shifts A^G y B^G. Dado un subconjunto finito $S \subset G$ y un mapeo $\mu : A^S \to B$, podemos construir un mapeo continuo y G-equivariante $\tau : A^G \to B^G$ de la siguiente manera: para todo $x \in A^G$ definimos $\tau(x) \in A^B$ mediante la siguiente relación:

$$\forall g \in G,\ \tau(x)(g) = \mu((g^{-1} \cdot x)|_S).$$

Observación 2.3.1. Sea $K \subseteq G$ un subconjunto finito y consideremos A^K con la topología prodiscreta. El mapeo $\mathrm{Res}_K : A^G \to A^K$ dado por $\mathrm{Res}_K(x) = x|_K$ es continuo. En efecto, pues al ser K finito la proposición 2.2.1 garantiza que A^K es en realidad un espacio discreto. Así una subbase para A^K es la colección de conjuntos unipuntuales $\{\{x\} :\ x \in A^K\}$. Finalmente observe que

$$\mathrm{Res}_K^{-1}(x) = \{z \in A^G :\ z|_K = x\} = V(x', K),$$

donde x' es cualquier extensión de x a A^G. Luego, $\mathrm{Res}_K^{-1}(x)$ es un conjunto abierto para todo $x \in A^K$. El mapeo μ es un mapeo entre los espacios discretos, luego es continuo; además, por la proposición 2.1.4 el mapeo de transición $\varphi_{g^{-1}}$ es también continuo.

En realidad, la observación anterior implica que $\tau : A^G \to B^G$ es un mapeo continuo, pues para toda $g \in G$ tenemos que

$$\pi_g \circ \tau(x) = \tau(x)(g) = \mu \circ \mathrm{Res}_S \circ \varphi_g(x),\ \forall x \in A^G.$$

Además, $\tau : A^G \to B^G$ es G-equivariante pues para cada $g, h \in G$ se cumple:

$$\begin{aligned} g \cdot \tau(x)(h) &= \tau(x)(g^{-1}h) \\ &= \mu(((g^{-1}h)^{-1} \cdot x)|_S) \\ &= \mu((h^{-1}g \cdot x)|_S) \\ &= \mu((h^{-1} \cdot (g \cdot x))|_S) \\ &= \tau(g \cdot x)(h) \end{aligned}$$

De hecho, cuando los alfabetos son finitos uno puede obtener de esta manera todos los mapeos continuos y G-equivariantes entre los correspondientes full G-shifts.

Teorema 2.3.1 (Curtis-Lyndon-Hedlund)**.** *Sean A^G y B^G dos full G-shifts con A y B finitos. Un mapeo $\tau : A^G \to B^G$ es continuo y G-equivariante si y sólo si existe un subconjunto finito $S \subseteq G$ y un mapeo $\mu : A^S \to B$ tal que*

$$\tau(x)(g) = \mu((g^{-1} \cdot x)|_S),$$

para todo $x \in A^G$ y $g \in G$.

Demostración. El converso se sigue de la discusión anterior. Así, supongamos que $\tau : A^G \to B^G$ es un mapeo continuo y G-equivariante. Consideremos el mapeo $\hat{\mu} : A^G \to B$ dado por

$$\hat{\mu}(x) := \tau(x)(e),\ \forall x \in A^G,$$

donde e es la identidad del grupo. Observe que $\hat{\mu} = \pi_e \circ \tau$, de donde se desprende que $\hat{\mu}$ es continuo al ser composición de mapeos continuos. Por lo tanto, para toda $x \in A^G$ y toda vecindad V de $\hat{\mu}(x)$ existe una vecindad $V(x, K_x)$ de x (con $K_x \subseteq G$ finito) tal que $\hat{\mu}(V(x, K_x)) \subseteq V$. En particular, si considereamos el abierto $V = \{\hat{\mu}(x)\} \subset B$, tenemos que

$$\hat{\mu}(x) = \hat{\mu}(z),\ \forall z \in V(x, K_x). \tag{2.3.1}$$

La colección $\{V(x, K_x) :\ x \in A^G\}$ es una cubierta abierta de A^G. Debido a que A es finito, A^G es compacto por la Proposición 2.2.1, así que existe un subconjunto finito $F \subseteq A^G$ tal que $\{V(x, K_x) :\ x \in F\}$ es una cubierta abierta de A^G. Definamos el siguiente conjunto finito de G:

$$S := \bigcup_{x \in F} K_x.$$

Sean $x, y \in A^G$ tales que $y|_S = z|_S$, y sea $x_0 \in F$ tal que $y \in V(x_0, K_{x_0})$. Como $K_{x_0} \subseteq S$, tenemos que $y|_{K_{x_0}} = z|_{K_{x_0}}$, y por lo tanto $z \in V(x_0, K_{x_0})$. Luego, por la relación (2.3.1) de arriba tenemos que

$$\hat{\mu}(y) = \hat{\mu}(x_0) = \hat{\mu}(z).$$

Esto demuestra que la imagen de cualquier $z \in A^G$ bajo $\hat{\mu}$ sólo depende de $z|_S$, y podemos definir el mapeo $\mu : A^S \to B$ como $\hat{\mu}(z') := \hat{\mu}(z)$, para toda $z' \in A^S$, donde z es cualquier configuración en A^G tal que $z' = z|_S$. Por G-equivarinaza, tenemos que para cualquier $x \in A^G$, $g \in G$,

$$\tau(x)(g) = g^{-1} \cdot \tau(x)(e) = \tau(g^{-1} \cdot x)(e) = \hat{\mu}(g^{-1} \cdot x) = \mu((g^{-1} \cdot x)|_S).$$

Así, existe un subconjunto finito $S \subseteq G$ y un mapeo $\mu : A^S \to B$ tal que

$$\tau(x)(g) = \mu((g^{-1} \cdot x)|_S).$$

■

Si aplicamos el Teorema con $B = A$ tenemos una familia importante de endomorfismos [1] del full G-shift A^G, los denominados *autómatas celulares*.

Definición 2.3.1. Sea G un grupo y A un conjunto. Un *autómata celular* sobre A^G es un mapeo

$$\tau : A^G \to A^G$$

tal que existe un subconjunto finito $S \subseteq G$ (llamado *conjunto memoria* de τ), y un *mapeo local* $\mu : A^S \to A$ que satisfacen

$$\tau(x)(g) = \mu((g^{-1} \cdot x)\,|_S\,),$$

para toda $x \in A^G$, $g \in G$.

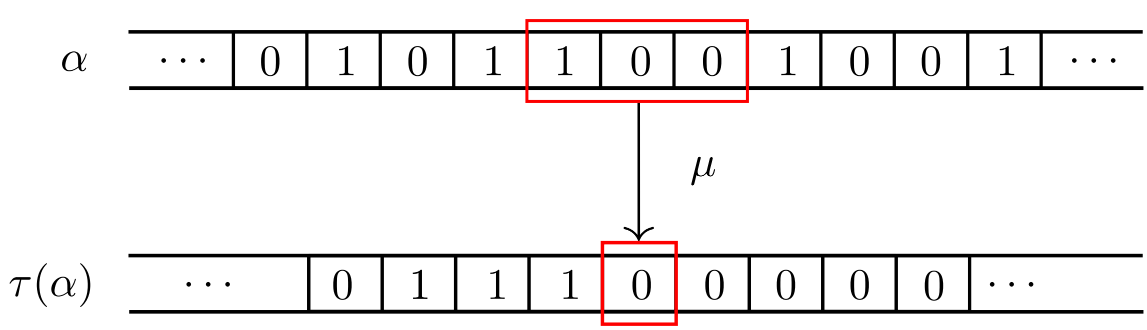
Observación 2.3.2. Cuando trabajamos con un autómata celular τ, la relación $\tau(x)(e) = \mu(x|_S)$ es útil para identificar el mapeo local asociado.

Ejemplo 2.3.1. (Transformaciones del alfabeto) Sea G un grupo, A un conjunto y $f : A \to A$ un mapeo de A en sí mismo. Entonces el mapeo $\tau : A^G \to A^G$ definido por $\tau(x) = f \circ x$ satisface las relaciones $\tau(x)(e) = (f \circ x)(e) = f(x|_{\{e\}})$, por lo cual τ es un autómata celular con conjunto memoria $S = \{e\}$ y mapeo local $\mu : A^S \to A$ dado por $\mu(y) = f(y(e))$. En particular, si f es el mapeo identidad Id_A en A, entonces τ es igual al mapeo Id_{A^G} en A^G.

Ejemplo 2.3.2. (Acción de Mayoría sobre $\mathbb{Z}$) Considere $G = \mathbb{Z}$, $A = \{0, 1\}$, $S = \{-1, 0, 1\}$ y $\mu : A^S \to A$ definida por

$$\mu(a_{-1}, a_0, a_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{-1} + a_0 + a_1 \geq 2, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El comportamiento del correspondiente autómata celular $\tau : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ se muestra en la siguiente figura.



[1]Un endomorfimo es un morfismo topológico de un espacio shift en sí mismo.

Note que τ no es sobreyectivo, pues[2] $01001^\infty \notin \tau(A^{\mathbb{Z}})$; además tampoco es inyectivo, ya que $\tau(110^\infty) = \tau(1^\infty) = 1^\infty$.

Ejemplo 2.3.3. (El Juego de la Vida) Consideremos el grupo $G = \mathbb{Z}^2$ y el conjunto finito $S = \{-1, 0, 1\} \subset G$. Entonces, hay una correspondencia uno a uno entre las células en la retícula (en el sentido clásico) y los elementos en G de manera que se cumple lo siguiente. Si c es una célula dada, entonces $c + (0, 1)$ es la célula vecina al norte, $c + (1, 1)$ es la célula vecina al noreste, y así sucesivamente; en otras palabras, c y sus ocho células vecinas corresponden a los elementos del grupo $c + s$ con $s \in S$.

$c + (-1, 1)$	$c + (0, 1)$	$c + (1, 1)$
$c + (-1, 0)$	c	$c + (1, 0)$
$c + (-1, -1)$	$c + (0, -1)$	$c + (1, -1)$

Figura 2.1: Vecindad de una célula c.

Además consideremos el alfabeto $A = \{0, 1\}$, donde el estado 0 (resp. 1) corresponde a la ausencia (resp. presencia) de vida. A cada configuración de los estados de las células en la retícula asociamos un mapeo $x \in A^G$ definido como sigue. Dada una célula c, establecemos $x(c) = 1$ (resp. 0) si la célula c está viva (resp. muerta). Aquí $\mu : A^S \to A$ está dada por:

$$\mu(y) = \begin{cases} 1, & \text{si} \begin{cases} \sum_{s \in S} y(s) = 3 \\ \quad \text{o} \\ \sum_{s \in S} y(s) = 4 \quad \text{y} \quad y((0,0)) = 1 \end{cases} \\ \\ 0, & \qquad \text{en otro caso} \end{cases}$$

para toda $y \in A^G$.

[2] La expresión 01001^∞ representa la configuración periódica ...0100101001.0100101001...; puede revisar la sección 5.4.1 para más detalles.

Hay que notar que esta familia de endomorfismos no es exhaustiva, es decir, existen endomorfimos que no son autómatas celulares, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.4. Consideremos el espacio de configuraciones A^G con G un grupo infinito arbitrario y $G = A$. El mapeo $\tau : A^G \to A^G$ dado por

$$\tau(x)(g) = x(gx(g)),$$

para todo $x \in A^G$, $g \in G$, es un endomorfismo del full shift A^G que no es autómata celular. Para ver que τ es G-equivariante observe que dado $x \in A^G$ y $g, h \in G$ se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} g \cdot (\tau(x))(h) &= \tau(x)(g^{-1}h) \\ &= x(g^{-1}h \cdot x(g^{-1}h)) \\ &= x(g^{-1}h \cdot [g^{-1} \cdot x](h)) \\ &= g \cdot x(h \cdot [g^{-1} \cdot x](h)) \\ &= \tau(g \cdot x)(h). \end{aligned}$$

Sean $x \in A^G$ y $K \subset G$ un conjunto finito. Hagamos $F = K \cup \{k \cdot x(k) : \ k \in K\}$. Si $y \in V(x, F)$, entonces para cada $k \in K$ uno tiene que

$$\tau(x)(k) = x(kx(k)) = y(kx(k)) = y(ky(k)) = \tau(y)(k),$$

lo cual significa que $\tau(y) \in V(\tau(x), F)$. Luego τ es continuo. Así hasta el momento sabemos que τ es un morfismo topológico de A^G.
Ahora bien, consideremos un elementos $g_0 \in G \setminus \{e\}$ fijo y para cada $g \in G$ consideremos las configuraciones x_g y y_g en A^G definidos mediante

$$x_g(h) = \begin{cases} g & \text{si } h = e \\ g_0 & \text{si } h = g \\ e & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$y_g(h) = \begin{cases} g & \text{si } h = e \\ e & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para toda $h \in G$. Observe que $x_g|_{G\setminus\{g\}} = y_g|_{G\setminus\{g\}}$. Sea $F \subset G$ un conjunto finito. Ya que G es infinito es posible elegir $g \in G \setminus F$. Así uno tiene que $x_g|_F = y_g|_F$ mientras que

$$\tau(x_g)(e) = x_g(x_g(e)) = x_g(g) = g_0 \neq e = y_g(g) = y_g(y_g(e)) = \tau(y_g)(e).$$

Por lo tanto, no existe conjunto finito $F \subset G$ tal que para toda $x \in A^G$, los valores de $\tau(x)$ en e solo dependan de los valores de $x|_F$, es decir, τ no es autómata celular.

Proposición 2.3.1. *Sea G un grupo y A un conjunto. Considere un mapeo $\tau : A^G \to A^G$. Sea S un subconjunto finito de G y sea $\mu : A^S \to A$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *τ es un autómata celular que admite a S como conjunto memoria y a μ como el mapeo local asociado.*

(ii) *τ es G-equivariante y se tiene que $\tau(x)(e) = \mu(x|_S)$ para todo $x \in A^G$.*

Demostración. Todo autómata celular es un morfismo topológico por lo cual es G-equivariante, además, por definición $\tau(x)(e) = \mu((e^{-1} \cdot x)|_S) = \mu(x|_S)$. Luego (i) implica (ii)
Recíprocamente, supongamos que se cumple (ii). Entonces, por la G-equivarianza de τ, tenemos

$$\tau(x)(g) = g^{-1} \cdot \tau(x)(e) = \tau(g^{-1} \cdot x)(e) = \mu\left((g^{-1} \cdot x)|_S\right)$$

para todo $x \in A^G$ y $g \in G$. Luego, (ii) implica (i). ■

Lema 2.3.1. *Sea G un grupo y sea A un conjunto. Sea $\tau : A^G \to A^G$ un autómata celular con conjunto memoria S y sea $g \in G$. Entonces $\tau(x)(g)$ depende solo de las restricción de x a gS.*

Demostración. Si $\mu : A^S \to S$ es el mapeo local asociado, entonces por definición de autómata celular se cumple $\tau(x)(g) = \mu((g^{-1} \cdot x)\,|_S)$, sin embargo, $(g^{-1} \cdot x)(s) = x(gs)$ para todo $s \in S$. ■

Proposición 2.3.2. *Sea G un grupo y sea A un conjunto. Sean $\sigma : A^G \to A^G$ y $\tau : A^G \to A^G$ autómatas celulares con conjuntos memoria S y T respectivamente. Entonces la composición $\sigma \circ \tau : A^G \to A^G$ es un autómata celular que admite a $ST = \{st : s \in S, t \in T\}$ como conjunto memoria.*

Demostración. Al ser σ y τ mapeos G-equivariantes el mapeo $\sigma \circ \tau$ es G-equivariante en virtud de iv) la Proposición 2.1.2.
Por otro lado, para cada $x \in A^G$, tenemos que $\sigma \circ \tau(x)(e) = \sigma\left(\tau(x)\right)(e)$ sólo depende de la restricción de $\tau(x)$ a S. Nuevamente, por el Lema 2.3.1 se cumple que, para todo $s \in S$, el valor $\tau(x)(s)$ depende solo de la restricción de x a sT. Por lo tanto, $\sigma \circ \tau(x)(e)$ depende solo de la restricción de x a ST, es decir existe un mapeo $\mu : A^{ST} \to A$, tal que $\sigma \circ \tau(x)(e) = \mu(x|_{ST})$. Finalmente aplicando la Proposición 2.3.1 se concluye que $\sigma \circ \tau$ es un autómata celular que admite conjunto memoria ST. ■

Se sigue de la Proposición 2.3.2 y del Ejemplo 2.3.1 que para un conjunto A y un grupo G el conjunto de autómatas celulares sobre A^G constituyen un monoide bajo la composición de mapeos, el cual denotamos mediante

$$\mathrm{CA}(A^G) := \{\tau : A^G \to A^G : \tau \text{ es un autómata celular}\}.$$

Por otro lado, el grupo de unidades del monoide $\mathrm{CA}(A^G)$ denotado por $\mathrm{ICA}(A^G)$ consta de los **autómatas celulares invertibles** sobre A^G. Entonces los elementos del grupo $\mathrm{ICA}(A^G)$ son autómatas celulares $\tau : A^G \to A^G$ cuyo inverso $\tau^{-1} : A^G \to A^G$ es también un autómata celular.

Además, se sigue de 2.1.7 que todo autómata celular biyectivo sobre un espacio de configuraciones con alfabeto finito es siempre un autómata celular invertible.

Ejemplo 2.3.5. (Permutaciones del alfabeto) Consideremos un grupo contable G y un conjunto finito A. Siguiendo el Ejemplo 2.3.1 podemos considerar una permutación del alfabeto $f \in \mathrm{Sym}(A)$ y el correpondiente autómata $\tau(x) = f \circ x$. Entonces τ es un autómata celular invertible con inverso dado por $\tau^{-1}(x) = f^{-1} \circ x$. En este caso el espacio de configuraciones es metrizable (ver Proposición 2.2.2) y es de notar que estos autómatas son de hecho isometrías del espacio de configuraciones.

Ejemplo 2.3.6. (Marcador de Hedlund) Para un alfabeto finito A, la contrucción de automorfismos del full shift $A^{\mathbb{Z}}$ mediante la técnica de marcadores ha sido ampliamente utilizada para demostrar ciertas propiedades del grupo de automorfismos de $A^{\mathbb{Z}}$. Esta técnica fue introducida por Hedlund en [Hed69] y ha sido adaptada en diversos trabajos para estudiar el grupo de automorfismos de subshifts de tipo finito. En vista de que las permutaciones del alfabeto inducen automorfismos de $A^{\mathbb{Z}}$ (ver Ejemplo 2.3.5), es natural preguntarse si esto se puede generalizar a automorfismos inducidos por mapeos que reemplazan bloques en configuraciones. Sin embargo, surgen ciertos inconvenientes a la hora de tratar de definirlos. Veamos un par de ejemplos que ilustran la situación; en ellos asumimos que el alfabeto es $A = \{0, 1, 2\}$:

i) El mapeo $\phi : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$, de manera que $\phi(x)$ se obtiene reemplazando el bloque 12 por el bloque 01, siempre que $12 \sqsubset x$, por ejemplo:

$$x = ...0\mathbf{12}100.\mathbf{1212}0...$$

$$\phi(x) = ...0\mathbf{01}100.\mathbf{0101}0...$$

Este mapeo está bien definido, pero no es inyectivo, pues si $y = ...001100.12120...$, entonces $\phi(x) = \phi(y)$. Luego ϕ no es automorfismo.

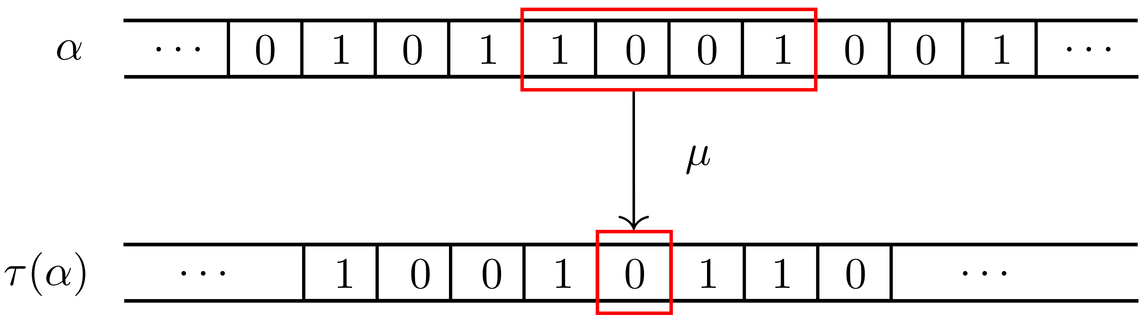
ii) También podríamos intentar definir el mapeo $\phi' : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$, de manera que $\phi'(x)$ se obtiene reemplazando el bloque 00 por el bloque 01, siempre que $00 \sqsubset x$ pero entonces ¿qué sucede con ...0.00...? ¿$\phi'(x) = ...0.10$ ó $\phi'(x) = ...0.01$? Luego el mapeo ϕ no está bien definido.

Entonces la construcción de automorfismos a partir de marcadores solventa esos problemas y acontinuación damos una describción de esta. Diremos que dos palabras w y u se *superponen* si podemeos escribir $w = w'v$ y $u = vu'$ o bien $u = u'v$ y $w = vw'$; más específicamente diremos que w y u se superponen con longitud i, donde $i = |v|$. Sean $M_\ell \in B_k(A^{\mathbb{Z}})$, $M_r \in B_{k'}(A^{\mathbb{Z}})$ y $\mathcal{D} \subseteq B_n(A^{\mathbb{Z}})$ tales que satisfacen la siguiente condición de superposicón: para cualesquiera $d, d' \in \mathcal{D}$, si $M_\ell d M_r$ y $M_\ell d' M_r$ se superponen (no trivialmente) con longitud $i \leq \text{mín}(k, k')$. Entonces cada permutación $\pi \in \text{Sym}(\mathcal{D})$ induce un automorfismo τ_π que escanea cada configuración x a través de una ventana de longitud $k + n + k'$ y cada bloque de la forma $M_\ell d M_r$ lo reemplaza por $M_\ell \pi(d) M_r$ dejando fija cualquier otra palabra que ocurra en x. A estos automorfismos τ_π se les conoce como *automorfismos de marcadores*; a M_ℓ y M_r se les llama *marcardores izquierdo y derecho* respectivamente; y a cada $d \in \mathcal{D}$ se le conoce como *palabra dato*. Observe que la condición de superposición mencionada garantiza que cada mapeo τ_π está bien definido. Además, ya que $\mathcal{D}$ es finito tenemos que cada automorfismo de marcadores es un elemento del grupo $\text{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ de orden finito.

Por ejemplo, podemeos considerar $A = \{0, 1\}$, $M_\ell = 0$, $M_r = 10$ y $\mathcal{D} = \{0, 1\}$. Si π es la identidad obtendremos el autómata celular invertible $\text{Id} : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$. Por otro lado, si π es la transposición que intercambia 0 y 1, entonces tendremos un autómata celular cuyo conjunto memoria es $S = \{-1, 0, 1, 2\}$ y con mapeo local $\mu : A^S \to A$ dado por

$$\mu(a_{-1}, a_0, a_1, a_2) = \begin{cases} 1 - a_0 & \text{si } (a_{-1}, a_1, a_2) = (0, 1, 0), \\ a_0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El correspondiente autómata celular $\tau_\pi : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ es una involución no trivial de $A^{\mathbb{Z}}$. La siguiente imagen ilustra el comportamiento de τ_π.



Ejemplo 2.3.7. Autómatas celulares invertibles inducidos por traslaciones. Sea G un grupo y A un conjunto. Si $s_0 \in G$ y $R_{s_0} : G \to G$ es tal que $R_{s_0}(g) = gs_0$ y definimos el mapeo $\tau : A^G \to A^G$ mediante $\tau(x) = x \circ R_{s_0}$, entonces, $\tau \in \mathrm{ICA}(G; A)$. En efecto, ya que

$$\begin{aligned}\tau(x)(g) &= \left(x \circ R_{s_0}\right)(g)\\ &= x(gs_0)\\ &= \mu\left((g^{-1}x)|_{\{s_0\}}\right)\end{aligned}$$

donde, $\mu(y|_{\{s_0\}}) = y(s_0)$ para cada $y \in A^G$.

Además el mapeo inverso de τ es τ^{-1} definido por $\tau^{-1}(x) = x \circ R_{s_0^{-1}}$. Basta con observar que:

$$\left(\tau \circ \tau^{-1}\right)(x) = \left(\tau(\tau^{-1}(x))\right) = \tau^{-1}(x \circ R_{s_0}) = (x \circ R_{s_0}) \circ R_{s_0^{-1}} = x \circ R_{s_0} \circ R_{s_0^{-1}},$$

y si $g \in G$, entonces:

$$\begin{aligned}(\tau^{-1} \circ \tau)(x)(g) &= \left(x \circ R_{s_0} \circ R_{s_0^{-1}}\right)(g)\\ &= (x \circ R_{s_0})(gs_0^{-1})\\ &= x(gs_0^{-1}s_0)\\ &= x(g)\end{aligned}$$

es decir, $(\tau \circ \tau^{-1}) = \mathrm{Id}_{A^G}$; análogamente es posible demostrar que $(\tau^{-1} \circ \tau) = \mathrm{Id}_{A^G}$. Pero, τ^{-1} también es un autómata celular, por lo tanto, $\tau \in \mathrm{ICA}(G; A)$.

Observación 2.3.3. Sea G un grupo y A un conjunto. Si $\tau : A^G \to A^G$ es un autómata celular con mapeo local $\mu : A^S \to A$, entonces el conjunto memoria S de τ no es único en general. Por ejemplo, podríamos considerar un conjunto finito $S' \subseteq G$ tal que $S' \supset S$ y el mapeo local asociado $\mu' : A^{S'} \to A$ dado por $\mu'(y) = \mu(y|_S)$ para cada $y \in A^{S'}$. Sin embargo, como veremos a continuación, todo autómata celular admite un conjunto memoria de cardinalidad mínima.

Lema 2.3.2. *Sea $\tau : A^G \to A^G$ un autómata celular. Sean S_1 y S_2 conjuntos memoria para τ. Entonces $S_1 \cap S_2$ es también un conjunto memoria para τ.*

Demostración. Sean $\mu_1 : A^{S_1} \to A$ y $\mu_2 : A^{S_1} \to A$ los correspondientes mapeos locales de τ asociados a los conjuntos memoria S_1 y S_2 respectivamente. Sea $y \in A^G$ tal que $x|_{S_1 \cap S_2} = y|_{S_1 \cap S_2}$. Sea $z \in A^G$ tal que $z|_{S_1} = x_{S_1}$ y $z|_{S_2} = y|_{S_2}$ (podríamos considerar por ejemplo, z tal que $z|_{S_1} = x_{S_1}$ y $z|_{(G \setminus S_1)} = y|_{(G \setminus S_1)}$). Entonces se cumplen las relaciones

$$\tau(x)(e) = \mu_1(x|_{S_1}) = \mu_1(z|_{S_1}) = \tau(z)(e),$$

y

$$\tau(y)(e) = \mu_2(y|_{S_2}) = \mu_2(z|_{S_2}) = \tau(z)(e),$$

de donde se desprende que $\tau(x)(e) = \tau(y)(e)$. Por lo tanto, el valor $\tau(x)(e)$ depende solo de la restricción de x al conjunto $S_1 \cap S_2$ para todo $x \in A^G$. Luego existe un mapeo $\mu : A^{S_1 \cap S_2} \to A$ tal que

$$\tau(x)(e) = \mu(x|_{S_1 \cap S_2}) \text{ para todo } x \in A^G.$$

Pero τ es G-equivariante al ser autómata celular, de tal manera que la Proposición 2.3.1 nos garantiza que $S_1 \cap S_2$ es un conjunto memoria para τ. ■

Proposición 2.3.3. *Sea $\tau : A^G \to A^G$ un autómata celular. Entonces existe un único conjunto memoria $S_0 \subseteq G$ de cardinalidad mínima. Además, si S es un subconjunto finito de G, entonces S es un conjunto memoria para τ si y sólo si $S_0 \subseteq S$.*

Demostración. Sea S_0 es un conjunto memoria para τ de cardinalidad mínima. Por la Observación 2.3.3 todo subconjunto finito $S \subseteq G$ que contenga a S_0 es también un conjunto memoria para τ. Ahora si S es un conjunto memoria para τ, por el Lema 2.3.2 $S_0 \cap S$ es también un conjunto memoria para τ, pero S_0 es conjunto memoria de cardinalidad mínima, así que $|S \cap S_0| \geq |S_0|$. Esta última relación implica que $S_0 \subseteq S \cap S_0 \subseteq S$. En particular, S_0 está contenido en cualquier otro conjunto memoria y es el único de cardinalidad mínima. ■

El conjunto memoria de cardinalidad mínima de un autómata celular es llamado *conjunto memoria mínimo.*

Proposición 2.3.4. *El conjunto memoria mínimo S_0 de un autómata celular $\tau : A^G \to A^G$ está dado por*

$$S_0 := \left\{ s \in G \;:\; \exists x_1, x_2 \in A^G \ t.q.\ \tau(x_1)(e) \neq \tau(x_2)(e) \wedge x_1(g) = x_2(g) \ \forall g \in G \setminus \{s\} \right\}$$

Demostración. Sea S el conjunto memoria mínimo de un autómata celular τ, $\mu \in A^{A^S}$ el mapeo local de τ asociado al conjunto memoria S y S_0 definido como antes.

Supongamos que existe $s \in S$ tal que $s \notin S_0$. Entonces para cada par de configuraciones $x_1, x_2 \in A^G$ se cumple que: si $x_1|_{G\setminus\{s\}} = x_2|_{G\setminus\{s\}}$ entonces $\tau(x_1)(e) = \tau(x_2)(e)$, en particular si $x_1, x_2 \in A^G$ son tales que $x_1|_{S\setminus\{s\}} = x_2|_{S\setminus\{s\}}$ tenemos que $\tau(x_1)(e) = \tau(x_2)(e)$, lo cual significa que el valor $\tau(x)(e)$ solo depende de la restricción de x a $S' := S \setminus \{s\}$. Así que existe $\mu' \in A^{A^{S'}}$ tal que

$$\tau(x)(e) = \mu'(x|_{S'}), \quad \forall x \in A^G.$$

Luego por G-equivarianza de τ tenemos que

$$\tau(x)(g) = g^{-1} \cdot \tau(x)(e) = \tau(g^{-1} \cdot x)(e) = \mu'\left((g^{-1} \cdot x)|_{S'}\right),$$

lo cual significa que S' es un conjunto memoria para τ contradiciendo el hecho de que S es el conjunto memoria mínimo. Esto demuestra que $S \subseteq S_0$.

Ahora supongamos que existe $s \in S_0$ tal que $s \notin S$. Entonces en particular ocurre que existen dos configuraciones $x_1, x_2 \in A^G$ tales que $\tau(x_1)(e) \neq \tau(x_2)(e)$, pero $x_1|_S = x_2|_S$, lo cual significa que el valor de $\tau(x)(e)$ no depende de la restricción de x a S contradiciendo el hecho de que S es conjunto memoria para τ. Así tenemos que $S_0 \subseteq S$. ■

Ejemplo 2.3.8. Sea $x^* \in A^G$ y consideremos el mapeo constante $\tau : A^G \to A^G$ dado por $\tau(x) = x^*$ para todo $x \in A^G$. Entonces tenemos un autómata celular con mapeo local dado por $\tau(x)(e) = x^*(e)$, donde se observa que la imagen de mapeo local no depende de ninguna coordenada específica de x. Alternativamente, también podemos argumentar que $\tau(x_1)(e) = x^*(e) = \tau(x_2)(e)$ para todo par de configuraciones x_1, x_2; luego por la Proposición 2.3.4 tenemos que $S_0 = \varnothing$. Así el conjunto memoria mínimo para un autómata celular constante es el conjunto vacío. Por otro lado, si τ es un autómata celular con conjunto memoria $\varnothing$, entonces el valor de $\tau(x)(e) \in A$ es el mismo para cada $x \in A^G$, pues la restricción de cada configuración al conjunto vacío es la misma (el conjunto vacío). Además, por G-equivarianza para cada $g \in G$ y $x \in A^G$ tenemos que

$$\tau(x)(g) = g^{-1} \cdot \tau(x)(e) = \tau(g^{-1} \cdot x)(e) = \tau(x)(e),$$

lo cual significa que, de hecho, $\tau(A^G) = \{x^*\}$ donde $x^* \in A^G$ es la configuración constante dada por $x^*(g) = \tau(x)(e)$ para cada $g \in G$. Por lo tanto, el conjunto memoria de un autómata celular τ es el conjunto vacío si y sólo si τ es un mapeo constante.

Ejemplo 2.3.9. Por definición el conjunto memoria de los autómatas celulares inducidos por traslaciones es un conjunto unipuntual (ver el Ejemplo 2.3.7) y al no ser mapeos constantes este es el conjunto memoria mínimo. Un argumento análogo nos dice que los autómatas inducidos por transformaciones del alfabeto (ver el Ejemplo 2.3.1) tienen conjunto memoria mínimo unipuntual.

Proposición 2.3.5. *Sea G un grupo y A un conjunto. Entonces el grupo* $\mathrm{ICA}(A^G)$ *continene una copia de G.*

Demostración. Consideremos el mapeo $\Phi : G \to \mathrm{ICA}(G; A)$, tal que $\Phi(s) = \tau_s$, donde $s \in G$ y $\tau_s : A^G \to A^G$ es el autómata celular invertible dado por $\tau_s(x)(g) = x(gs)$ para cada $x \in A^G$ y $g \in G$ justo como en el Ejemplo 2.3.7. Veamos que Φ es un homomorfismo de grupos. Si $r, s, g \in G$, entonces

$$\begin{aligned}
[(\tau_r \circ \tau_s)(x)](g) &= [(\tau_r(\tau_s(x))](g) \\
&= (\tau_s(x))\,(gr) \\
&= x(grs) \\
&= x(g(rs)) \\
&= \tau_{rs}(x)(g),
\end{aligned}$$

es decir, $\Phi(rs) = \tau_{rs} = \tau_r \circ \tau_s = \Phi(r)\Phi(s)$. Ahora tomemos $r, s \in G$ tales que $\Phi(r) = \Phi(s)$, entonces se cumple que $\tau_r(x) = \tau_s(x)$ para toda $x \in A^G$. Además, como τ_r es invertible, tenemos la relación $x = \tau_{r^{-1}s}(x)$, para toda $x \in A^G$. Se sigue que $\tau_e = \tau_{r^{-1}s}$. Como el conjunto memoria de ambos es mínimo se cumple la relación $\{e\} = \{r^{-1}s\}$, es decir, $r = s$. Por lo tanto, Φ es inyectivo. Lo anterior demuestra que $G \hookrightarrow \mathrm{ICA}(A^G)$. ■

Observación 2.3.4. Si en la Proposición 2.3.5 exigimos que $|A| > 1$, Φ no es sobreyectivo. En efecto, pues en la familia de automorfismos inducidos por traslaciones el único elemento que tiene como conjunto memoria mínimo a $\{e\}$ es $\tau_e(x) = \mathrm{Id}_{A^G}$. Sin embargo, como A tiene al menos dos elementos existen permutaciones no triviales del alfabeto que inducen autómatas celulares invertibles con conjunto memoria mínimo $\{e\}$, los cuales son diferentes de la identidad, y por lo tanto, no pertenecen a $\Phi(G)$.

Capítulo 3

El número de configuraciones en el Full Shift con un periodo mínimo dado.

3.1. Inversión de Möbius

La inversión de Möbius es un método para invertir ciertos tipos de sumas que relacionan dos mapeos definidos sobre un conjunto parcialmente ordenado. Sus orígenes se remontan al estudio sistemático de las propiedades de la función de Möbius llevado a cabo por August Ferdinand Möbius durante el siglo XIX; más específicamente en el contexto de la teoría de la teoría de números, donde es útil para establecer propiedades de funciones aritméticas y multiplicativas. La primera versión coherente del enunciado del Teorema de Inversión de Möbius fue presentada 1935 por L. Weisner y fue redescubirto por P. Hall en 1936, ambos motivados por la solución de problemas de teoría de grupos finitos. Sin embargo, en 1964 Gian-Carlo Rota publica [Rot64] en donde muestra por primera vez un estudio profundo de este principio y muestra sus alcances al aplicarlo a una amplia gama de situaciones, primordialmente enfocadas en combinatoria.

Para describir el concepto en su máxima generalidad recordaremos algunas definiciones básicas y resultados acerca de conjuntos parcialmente ordenados.

Definición 3.1.1. (Orden Parcial) Un orden parcial en un conjunto no vacío P es una relación binaria, denotada por $\leq$ y leída "menor o igual que", con las siguientes propiedades para todo $a, b, c \in P$:

1) **(reflexividad)**
$$a \leq a$$

2) **(antisimetría)**
$$a \leq b,\, b \leq a \Rightarrow a = b$$

3) **(transitividad)**
$$a \leq b,\, b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

El par $(P, \leq)$ es llamado **conjunto parcialmente ordenado** o **poset**. Si $a \leq b$, entonces se dice que a es menor o igual que b o que y es mayor o igual que x. Si $a \leq b$, pero $a \neq b$ escribimos $a < b$ o $b > a$. Si $a \leq b$ o $b \leq a$, entonces se dice que x y y son **comparables**; de otra forma, a y b son incomparables. Si $a, b \in P$, denotamos el hecho de que a no es menor que o igual a b por $a \nleq b$.

Observación 3.1.1. Note que en un poset, es posible que no todos los elementos sean comparables. Así, en general $a \nleq b$ no es equivalente a $b < a$.

Definición 3.1.2. (Elementos Máximos y Mínimos.) Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado..

1) Un elemento **maximal** es un elemento $m \in P$ tal que,

$$p \in P,\, m \leq p \Rightarrow m = p$$

Un elemento m en P se denomina **máximo** si

$$p \in P \Rightarrow p \leq m$$

Al elemento máximo le denotamos por 1 y lo llamamos el elemento unidad.

2) Un elemento **minimal** es un elemento $n \in P$ tal que,

$$p \in P,\, p \leq n \Rightarrow p = n$$

Un elemento $n \in P$ se dice denomina **mínimo** si

$$p \in P \Rightarrow n \leq p$$

Al elemento mínimo le denotamos por 0 y lo llamamos el elemento cero.

Un conjunto parcialmente ordenado es **acotado** si posee 0 o 1.

Definición 3.1.3. (Cotas superiores e inferiores) Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $S \subseteq P$.

1) Un elemento $u \in P$ es una **cota superior** para S si

$$s \leq u \text{ para toda } s \in S.$$

La mínima cota superior u para S, si existe, es llamada **sumpremo** de S.

2) Un elemento $l \in P$ es una **cota inferior** para S si

$$l \leq s \text{ para toda } s \in S.$$

La máxima cota inferior l para S, si existe, es llamada **ínfimo** de S.

Definición 3.1.4. (Retícula) Una retícula es un poset L para el que cada par de elementos $s, t \in L$ tiene una mínima cota superior, denotada por $s \vee t$ (la juntura de$s$ y t), y una máxima cota inferior, denotada por $s \wedge t$ (la concurrencia de s y t.

Definición 3.1.5. (Relación de cobertura) Dados a, b en un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$, decimos que b cubre a si

$$a \leq x \leq b \quad \Rightarrow \quad x = a \text{ o } x = b$$

Definición 3.1.6. (Diagrama de Hasse) Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado finito. El diagrama de Hasse de P es el conjunto de pares (a, b) tales que b cubre a. En este, los elementos de P se representan mediante puntos en el plano dibujando una arista ascendente de a a b si b cubre a.

Dado un grupo finito G, el retículo de subgrupos de G es el conjunto parcialmente ordenado $(\mathrm{sub}(G), \subseteq)$, donde $\mathrm{sub}(G)$ representa la familia de todos los subgrupos de G. Cuando se considera un grupo finito de orden "pequeño"podemos describir la estructura de su retículo de subgrupos mediante un diagrama de Hasse.

Definición 3.1.7. (Orden Total) Un poset $(P, \leq)$ es totalmente ordenado si cualesquiera $a, b \in P$ son comparables, es decir,

$$a \leq b \text{ o } b \leq a.$$

En este caso, se dice que el orden es total o lineal.

Definición 3.1.8. (Cadena) Sea $(P, \leq)$ un poset. Un subconjunto no vacío S de P es una **cadena** en P si S está totalmente ordenado por $\leq$. Una cadena finita con n elementos puede ser escrita en la forma

$$c_0 < c_1 < \cdots < c_n.$$

Se dice que tal **cadena tiene longitud** n. Si el conjunto de longitudes de todas las cadenas contenidas en P es acotado, entonces P tiene longitud finita y la máxima longitud es llamada la **longitud** de P.

Definición 3.1.9. Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Para $a, b \in P$, el **intervalo cerrado** de a a b es el conjunto

$$[a, b] = \{x \in P \mid a \leq x \leq b\}$$

Decimos que el conjunto parcialmente ordenado P es **localmente finito** si todo intervalo cerrado es finito.

Definición 3.1.10. (Ideal de Orden principal) Para $t \in P$, el *ideal de orden principal generado por* t es $\Lambda_t := \{s \in P : s \leq t\}$, y el *ideal de orden dual principal generado por* t es $V_t := \{s \in P : s \geq t\}$.

Dado un campo $\mathbb{K}$, recordemos que una $\mathbb{K}$-álgebra A es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ equipado con un producto bilineal.

Definición 3.1.11. El **álgebra de incidencia** de un poset localmente finito P sobre el campo $\mathbb{K}$ es

$$I(P, \mathbb{K}) := \{f : P \times P \to \mathbb{K} \mid f(x, y) = 0 \text{ si } x \nleq y\}.$$

con las operaciones dadas por

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y),$$

$$(f * g)(x, y) = \sum_{x \leq t \leq y} f(x, t) g(t, y) \quad \text{y}$$

$$(kf)(x, y) = kf(x, y),$$

para $f, g \in I(P, \mathbb{K})$ con $k \in \mathbb{K}$ y $x, y, t \in P$.

En efecto, $I(P,\mathbb{K})$ es un álgebra. Sean $f,g,h \in I(P,\mathbb{K})$. En primer lugar, si $x \nleq y$, entonces $(f*g)(x,y) = \sum_{t\in\varnothing} f(x,t)g(t,y) = 0$, por lo cual $f*g \in I(P,\mathbb{K})$. Ahora observe que para todo $x,y \in P$ se cumple

$$
\begin{aligned}
(f*g)*h(x,y) &= \sum_{x\leq t\leq y} (f*g)(x,t)h(t,y) \\
&= \sum_{x\leq t\leq y} \left(\sum_{x\leq z\leq t} f(x,z)g(z,t) \right) h(t,y) \\
&= \sum_{x\leq t\leq y} f(x,t) \left(\sum_{t\leq z\leq y} g(x,z)h(z,y) \right) \\
&= \sum_{x\leq t\leq y} f(x,t)(g*h)(t,y) \\
&= f*(g*h)(x,y)
\end{aligned}
$$

Con lo cual tenemos la asociatividad.

También observe que el mapeo característico de P definido como

$$
\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}
$$

para $x,y \in P$, es una función de incidencia. Justamente, este mapeo es la identidad del álgebra de incidencia pues

$$
(f*\delta)(x,y) = \sum_{x\leq t\leq y} f(x,t)\delta(t,y) = f(x,y) = \sum_{x\leq t\leq y} \delta(x,t)f(t,y) = (\delta*f)(x,y)
$$

Sean $f,g,h \in I(P,\mathbb{K})$ y $a \in \mathbb{K}$, entonces las propiedades distributivas

$$\begin{aligned} f*(g+h)(x,y) &= \sum_{x\leq t\leq y} f(x,t)(g+h)(t,y) \\ &= \sum_{x\leq t\leq y} f(x,t)\left(g(t,y)+h(t,y)\right) \\ &= \sum_{x\leq t\leq y} f(x,t)g(t,y) + \sum_{x\leq t\leq y} f(x,t)h(t,y) \\ &= f*g(x,y)+f*h(x,y) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [a(f*g)](x,y) &= a\left(f*g(x,y)\right) \\ &= a\sum_{x\leq t\leq y} f(x,t)g(t,y) \\ &= \sum_{x\leq t\leq y} (af(x,t))g(t,y) \\ &= (af)*g(x,y) \\ &= \sum_{x\leq t\leq y} f(x,t)(ag(t,y)) \\ &= f*(ag)(x,y) \end{aligned}$$

¿Cuándo un elemento del álgebra de incidencia es invertible?

Proposición 3.1.1. *Una función de incidencia $f \in I(P,\mathbb{K})$ posee un único inverso (a izquierda y a derecha) si y sólo si $f(x,x)\neq 0$ para todo $x\in P$.*

Demostración. Sea $g \in I(P,\mathbb{K})$ un inverso a derecha de f. Entonces se cumple la relación $f\cdot g(x,y)=\delta(x,y)$ para todo $x,y\in P$, lo cual es equivalente a

$$f(x,x)g(x,x)=1 \text{ para todo } x\in P,$$

y

$$f*g(x,y)=0, \text{ para todo } x,y\in P \text{ con } x\neq y.$$

Esta última relación la podemos escribir como

$$g(x,y) = -f(x,x)^{-1} \sum_{x<t\leq y} f(x,t)g(t,y), \text{ para todo } x<y \text{ en } P,$$

lo cual se cumple si y sólo si $f(x,x) \neq 0$ para todo $x \in P$. Análogamente se puede demostrar que f posee inverso a izquierda, digamos $h \in I(P,\mathbb{K})$ si y sólo si $f(x,x) \neq 0$ para todo $x \in P$. Además, se cumplen la relaciones

$$\begin{aligned} f*g &= \delta \\ h*f*g &= h*\delta \\ \delta*g &= h \\ g &= h, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue. ■

La **función zeta** ζ dada por

$$\zeta(x,y) = 1, \text{ para todo } x \leq y \text{ en } P.$$

Es claro que $\zeta \in I(P,\mathbb{K})$; además, por el resultado anterior ζ es elemento invertible del álgebra de incidencia. Denotamos por μ al inverso de ζ, el cual es llamado **la función de Möbius de** P. Podemos obtener una descripción recursiva para μ observando que la relación $\mu * \zeta = \delta$ es equivalente a

$$\mu(x,x) = 1 \text{ para todo } x \in P,$$

y

$$\mu(x,y) = -\sum_{x\leq t<y} \mu(x,t), \text{ para todo } x<y \text{ en } P.$$

Observación 3.1.2. Sea $z_1 < ... < z_n$ una cadena del poset P, entonces por definición

$$\mu(z_1,z_1) = 1,$$

$$\mu(z_1,z_2) = -\mu(z_1,z_1) = -1,$$
$$\mu(z_1,z_3) = -(\mu(z_1,z_1) + \mu(z_1,z_2)) = -(1+(-1)) = 0,$$

de donde se desprende que $\mu(z_1,z_k) = 0$, para $3 \leq k \leq n$.

Ahora consideremos el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{K}^P$ de mapeos de P en $\mathbb{K}$. Además, si el poset P es tal que todo ideal de orden principal es finito, el conjunto $I(P,\mathbb{K})$ equipado con la operación de convolución constituye un monoide que actúa por la derecha en $\mathbb{K}^P$ vía

$$(f\cdot\xi)(x) = \sum_{t\leq x} f(t)\xi(t,x), \tag{3.1.1}$$

donde $f \in \mathbb{K}^P$ y $\xi \in I(P,\mathbb{K})$. En efecto, pues si $\psi, \xi \in I(P,\mathbb{K})$ y $f \in \mathbb{K}^P$ tenemos que:

i) $(f \cdot \zeta)(x) = \sum_{t \leq x} f(t)\zeta(t,x) = f(x)\zeta(x,x) = f(x)$,

ii)

$$\begin{aligned}((f \cdot \psi) \cdot \xi)(x) &= \sum_{t \leq x} (f \cdot \psi)(t)\xi(t,x) \\ &= \sum_{t \leq x} \left(\sum_{s \leq t} f(s)\psi(s,t) \right) \xi(t,x) \\ &= \sum_{t \leq x} f(t) \left(\sum_{s \leq t \leq x} \psi(t,s)\xi(s,x) \right) \\ &= \sum_{t \leq x} f(t) \left(\psi(t,s) * \xi(t,x) \right) \\ &= f \cdot (\psi * \xi)(x).\end{aligned}$$

Proposición 3.1.2 (Fórmula de inversión de Möbius). *Sea P un poset para el cual todo ideal de orden principal Λ_t es finito. Sean $f, g : P \to \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es un campo. Entonces*

$$g(x) = \sum_{t \leq x} f(t), \text{ para todo } x \in P,$$

si y sólo si

$$f(x) = \sum_{t \leq x} g(t)\mu(t,x), \text{ para todo } x \in P.$$

Demostración. La acción derecha del monoide $(I(P,\mathbb{K}), *)$ en el espacio vectorial $\mathbb{K}^P$ dada por 3.1.1 está bien definida pues la suma que lo define es siempre finita al ser cada ideal de orden principal Λ_t finito. Además,

$$(f \cdot \zeta)(x) = \sum_{t \leq x} f(t)\zeta(t,x) = \sum_{t \leq x} f(t),$$

y

$$(g \cdot \mu)(x) = \sum_{t \leq x} g(t)\mu(t,x),$$

para todo $x \in P$. Por lo tanto, la proposición es equivalente a

$$g = f \cdot \zeta \Leftrightarrow f = g \cdot \mu,$$

la cual es verdadera en virtud de que μ y ζ son inversos en el álgebra de incidencia. ∎

Para nuestros propósitos será conveniente considerar la siguiente versión dual del teorema de inversión de Möbius, la cual se desprende del hecho de que podemos considerar una acción izquierda $(I(P,\mathbb{K}), *) \curvearrowright \mathbb{K}^P$ dada por

$$(\xi \cdot f)(x) = \sum_{t \geq x} \xi(t,x)f(x). \tag{3.1.2}$$

Proposición 3.1.3 (Fórmula de inversión de Möbius, forma dual). *Sea P un poset para el cual todo ideal de orden dual principal Λ_t es finito. Sean $f, g : P \to \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es un campo. Entonces*

$$g(x) = \sum_{t \geq x} f(t), \ \textit{para todo } x \in P,$$

si y sólo si

$$f(x) = \sum_{t \geq x} \mu(x,t) g(t), \ \textit{para todo } x \in P.$$

Demostración. Considerando la acción $(I(P,\mathbb{K}), *) \curvearrowright \mathbb{K}^P$, dada por 3.1.2, la proposición es equivalente a

$$g = \zeta \cdot f \Leftrightarrow f = \mu \cdot g,$$

y el resultado se sigue. ■

3.2. Configuraciones H-periódicas del Full Shift

Definición 3.2.1. Sea G un grupo y A un conjunto. Sea H un subgrupo de G. El conjunto de **configuraciones H-periódicas** es:

$$\mathrm{Fix}(H) := \{x \in A^G : \ h \cdot x = x, \ \ \text{para todo } h \in H\}.$$

Observación 3.2.1. La definición es equivalente a

$$\mathrm{Fix}(H) := \{x \in A^G : \ H \subseteq G_x\}.$$

También es habitual decir que $\mathrm{Fix}(H)$ es el conjunto de puntos que son fijados por H.

Proposición 3.2.1. *Sea H un subgrupo de G. Entonces el conjunto* $\mathrm{Fix}(H)$ *es cerrado en A^G para la topología prodiscreta.*

Demostración. Recordemos que el conjunto de puntos fijos de un automapeo continuo de un espacio de Hausdorff es un conjunto cerrado. Sabemos que el espacio de configuraciones A^G es de Hausdorff al ser producto de espacios de Hausdorff. Además sabemos que la acción shift $G \curvearrowright A^G$ es continua, de manera que para cada $h \in H$ el conjunto $\{x \in A^G : h \cdot x = x\}$ es cerrado al ser el conjunto de puntos fijos de la transición $x \mapsto h \cdot x$. Finalmente, observe que

$$\mathrm{Fix}(H) = \bigcap_{h \in H} \{x \in A^G : \ h \cdot x = x\},$$

así que $\mathrm{Fix}(H)$ es cerrado al ser intersección de conjuntos cerrados. ■

Proposición 3.2.2. *Sea H un subgrupo de G y sea $\rho : G \to H \setminus G$ la sobreyección canónica. Entonces:*

i) Las configuraciones en $\mathrm{Fix}(H)$ *son constantes en cada cociente derecho de H en G.*

ii) Para cada $y \in A^{H \setminus G}$ la composición $y \circ \rho$ es un elemento de $\mathrm{Fix}(H)$*.*

iii) El mapeo $\rho^* : A^{H \setminus G} \to \mathrm{Fix}(H)$ dado por $\rho^*(y) = y \circ \rho$ para todo $y \in A^{H \setminus G}$ es una biyección.

iv) El mapeo $\rho^* : A^{H\backslash G} \to \mathrm{Fix}(H)$ dado por $\rho^*(y) = y \circ \rho$ para todo $y \in A^{H\backslash G}$ es un homeomorfismo.

Demostración. Sea $x \in \mathrm{Fix}(H)$, entonces $h \cdot x(g) = x(h^{-1}g) = x(g)$ para toda $h \in H$, $g \in G$, luego $x(Hg) = \{x(g)\}$ y se cumple i). Para ver que se cumple *ii*) consideremos $y \in A^{H\backslash G}$ y observemos que

$$[h(y \circ \rho)](g) = (y \circ \rho)(h^{-1}g) = y(\rho(h^{-1}g)) = y(Hg) = y(\rho(g)) = (y \circ \rho)(g),$$

luego $y \circ \rho \in \mathrm{Fix}(H)$.
Ahora, por el inciso ii) el mapeo ρ^* está bien definido. Ahora, tomemos $y_1, y_2 \in A^{H\backslash G}$ con $y_1 \circ \rho = y_2 \circ \rho$. Al ser ρ mapeo sobreyectivo, posee inverso derecho por lo cual $y_1 = y_2$, luego ρ^* es inyectivo. Por otro lado, consideremos $x \in \mathrm{Fix}(H)$, entonces por el inciso i) $x(Hg) = x(g)$ para cada $Hg \in H \setminus G$. Sea $y \in A^{H\backslash G}$ tal que $y(Hg) = x(g)$, entonces para cada $g \in G$ tenemos que

$$\rho^*(y)(g) = (y \circ \rho)(g) = y(\rho(g)) = y(Hg) = x(g),$$

es decir, $\rho^*(y)(g) = x$ y ρ^* es sobreyectivo.
Finalmente, para cada $g \in G$, sean $\pi_g : A^G \to A$ y $\pi'_g : A^{H\backslash G} \to A$ las proyecciones dadas por $x \mapsto x(g)$ y $y \mapsto y(\rho(g))$ respectivamente. Observe que para cada g y todo $y \in A^{H\backslash G}$ se cumple que

$$(\pi_g \circ \rho^*)(y) = \pi_g \circ (y \circ \rho) = (y \circ \rho)(g) = (y \circ \rho)(g) = y(Hg) = \pi'_g(y),$$

por lo cual $\pi_g \circ \rho^* = \pi'_g$ para cada $g \in G$ y ρ^* es mapeo continuo.
Por otro lado, para todo $g \in G$ y $x \in \mathrm{Fix}(H)$ se cumple

$$\left(\pi_g \circ (\rho^*)^{-1}\right)(x) = \pi'_g(y) = y(Hg) = x(g) = \pi_g(x),$$

donde $y \in A^{H\backslash G}$ es tal que $y \circ \rho = x$. Lo cual significa que $\pi_g \circ (\rho^*)^{-1} = \pi_g$ para todo $g \in G$, luego $(\rho^*)^{-1}$ es mapeo continuo. Por lo tanto, ρ^* es un homeomorfismo y se cumple iv). ■

Corolario 3.2.1. *Si A es un conjunto finito y H es un subgrupo de G de índice finito, entonces*

$$|\mathrm{Fix}(H)| = |A|^{[G:H]}.$$

Ahora nos concentraremos en el conjunto $\mathrm{Fix}(N)$ con N un subgrupo normal de G.

Proposición 3.2.3. *Sea N un subgrupo normal de G. Entonces $\mathrm{Fix}(N)$ es un subconjunto G-invariante de A^G.*

Demostración. Sea $x \in \mathrm{Fix}(N)$ y $g \in G$. Dado $h \in N$, al ser N subgrupo normal se cumple la relación $Hg = gH$, en particular, existe $h' \in N$ tal que $hg = gh'$. Por lo tanto,

$$h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x = (gh') \cdot x = g \cdot (h' \cdot x) = g \cdot x,$$

lo cual nos dice que $g \cdot x \in \mathrm{Fix}(N)$. ■

La proposición anterior nos permite restringir la acción shift $G \curvearrowright A^G$ a $\mathrm{Fix}(N)$ para obtener una acción de G en $\mathrm{Fix}(N)$. Además, en vista de que cada elemento de $\mathrm{Fix}(N)$ es fijado por N esta última acción a su vez induce una acción de G/N en $\mathrm{Fix}(N)$ dada por $\rho(g) \cdot x = g \cdot x$ para cada $x \in \mathrm{Fix}(N)$.

Proposición 3.2.4. *Sea N un subgrupo normal de G y sea $\rho : G \to G/N$ el epimorfismo canónico. Entonces el mapeo $\rho^* : A^{G/N} \to \mathrm{Fix}(N)$ dado por $\rho^*(y) = y \circ \rho$ para todo $y \in A^{G/N}$ es una biyección G/N-equivariante.*

Demostración. De la proposición 3.2.2 sabemos que ρ^* es un mapeo biyectivo. Ahora observe que dados $g \in G$ y $y \in A^{G/N}$ tenemos que las siguientes relaciones se cumplen para todo $g' \in G$:

$$\begin{aligned}
\rho(g) \cdot \rho^*(y)(g') &= g \cdot \rho^*(y)(g') \\
&= \rho^*(y)(g^{-1}g') \\
&= y \circ \rho(g^{-1}g') \\
&= y(\rho(g^{-1}g')) \\
&= y(\rho(g)^{-1}\rho(g')) \\
&= (\rho(g) \cdot y)(\rho(g')) \\
&= [(\rho(g) \cdot y) \circ \rho](g') \\
&= \rho^*(\rho(g) \cdot y)(g'),
\end{aligned}$$

lo cual nos dice que $\rho(g) \cdot \rho^*(y) = \rho^*(\rho(g) \cdot y)$, es decir que ρ^* es G/N-equivariante. ∎

Observación 3.2.2. Sea $x \in \mathrm{Fix}(N)$. Observe que $(\rho^*)^{-1}(x)(hN) = x(g)$ para toda $g \in hN$.

Dado un autómata celular $\tau : A^G \to A^G$, por la Proposición 2.1.9 se cumple que $\tau(\mathrm{Fix}(N)) \subseteq \mathrm{Fix}(N)$. Con esto en mente podemos usar $\rho^* : A^{G/N} \to \mathrm{Fix}(N)$ para definir el mapeo $\overline{\tau} : A^{G/N} \to A^{G/N}$ mediante

$$\overline{\tau} = (\rho^*)^{-1} \circ \tau|_{\mathrm{Fix}(H)} \circ \rho^*.$$

Por otro lado, si $\mu : A^S \to A$ es un el mapeo local para τ, entonces podemos considerar el conjunto $\overline{S} := \rho(S) =\subset G/N$ para construir el mapeo $\overline{\mu} = \mu \circ \pi$ donde $\pi : A^{\overline{S}} \to A^S$ mapea $\overline{\varphi} \mapsto \varphi$ de tal manera que $\overline{\varphi}(gN) = \varphi(s)$ para toda $s \in gN$.

Observación 3.2.3. Con respecto a la descripción anterior ya que S es finito, entonces $\overline{S}$ también lo es, digamos $\overline{S} = \{s_1N,_2 N, ..., s_kN\}$. Entonces $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} s_iN$. Además si $S_i := S \cap s_iN$, entonces $S = \bigsqcup_{i=1}^{k} S_i$. Por otro lado, si $p \in A^S$ es un patrón tal que es constante en cada S_i y $\overline{p} \in A^{\overline{S}}$ es tal que $\pi(\overline{p}) = p$, entonces por construcción

$$\mu(p) = \overline{\mu}(\overline{p}).$$

En particular, si $x = y \circ \rho \in \mathrm{Fix}(N)$ para algún $y \in A^{G/N}$, entonces tenemos

$$\pi(y|_{\overline{S}}) = x|_S.$$

Finalmente, observemos que la Proposición 3.2.4 nos dice que dados $g \in G$ y $y \in A^{G/N}$ se cumple la realción

$$g \cdot (y \circ \rho) = gN \cdot (y \circ \rho) = \rho(g) \cdot \rho^*(y) = \rho^*(\rho(g) \cdot y) = \rho^*(gN \cdot y) = (gN \cdot y) \circ \rho,$$

luego

$$\pi\left((gN\cdot y)|_{\overline{S}}\right) = \left(g\cdot(y\circ\rho)\right)|_S$$

y

$$\overline{\mu}\left((gN\cdot y)|_{\overline{S}}\right) = \mu\left((g\cdot(y\circ\rho))|_S\right).$$

Proposición 3.2.5. *El mapeo $\overline{\tau}: A^{G/N}\to A^{G/N}$ es un autómata celular sobre G/N que admite a $\overline{S}$ como conjunto memoria y tiene a $\overline{\mu}: A^{\overline{S}}\to A$ como mapeo local asociado.*

Demostración. Sea $y\in A^{G/N}$ y $gN\in G/N$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{\tau}(gN) &= \left[(\rho^*)^{-1}\circ\tau|_{\mathrm{Fix}(H)}\circ\rho^*\right](y)(gN)\\
&= \left[(\rho^*)^{-1}\circ\tau|_{\mathrm{Fix}(H)}\right](y\circ\rho)(gN)\\
&= (\rho^*)^{-1}\left(\tau(y\circ\rho)\right)(gN)\\
&= \tau(y\circ\rho)(g)\ \ldots\ldots\ \text{por Obs. 3.2.2}\\
&= \mu\left((g^{-1}\cdot(x\circ\rho))|_S\right)\\
&= \overline{\mu}\left((g^{-1}N\cdot y)|_{\overline{S}}\right)\ \ldots\ldots\ \text{por Obs. 3.2.3}.
\end{aligned}$$

■

El siguiente diagrama conmutativo ilustra la filosofía en la contrucción de autómatas celulares sobre grupos cociente: cada autómata celular τ sobre A^G induce un autómata celular $\overline{\tau}$ sobre $A^{G/N}$.

$$\begin{tikzcd}
A^{G/N} \arrow[r, "\rho^*"] \arrow[d, "\overline{\tau}"'] & \mathrm{Fix}(N) \arrow[d, "\tau|_{\mathrm{Fix}(N)}"] \\
A^{G/N} \arrow[r, "\rho^*"'] & \mathrm{Fix}(N)
\end{tikzcd}$$

En realidad, la asignación $\tau\mapsto\overline{\tau}$ determina un epimorfimos de monoides.

Proposición 3.2.6. *El mapeo $\Phi:\mathrm{CA}(A^G)\to\mathrm{CA}(A^{G/N})$ dado por $\Phi(\tau)=\overline{\tau}$ es un epimorfismo de monoides.*

Demostración. El mapeo Φ un homomorfismo pues para todo $\tau_1,\tau_2\in A^G$ se cumplen las relaciones:

$$\begin{aligned}
\Phi(\tau_1)\circ\Phi(\tau_2) &= \overline{\tau_1}\circ\overline{\tau_2}\\
&= (\rho^*)^{-1}\circ\tau_1|_{\mathrm{Fix}(H)}\circ\rho^*\circ(\rho^*)^{-1}\circ\tau_2|_{\mathrm{Fix}(H)}\circ\rho^*\\
&= (\rho^*)^{-1}\circ(\tau_1\circ\tau_2)|_{\mathrm{Fix}(H)}\circ\rho^*\\
&= \overline{\tau_1\circ\tau_2}\\
&= \Phi(\tau_1\circ\tau_2).
\end{aligned}$$

Ahora para demostrar que Φ es sobreyectivo consideremos $\sigma\in\mathrm{CA}(A^{G/N})$ con conjunto memoria $T\subseteq G/N$ y mapeo local $\nu: A^T\to A$. Vamos a construir un autómata celular $\tau\in\mathrm{CA}(A^G)$ tal que $\Phi(\tau)=\overline{\tau}=\sigma$. Primeramente, de cada clase lateral en T tomamos un elemento para formar un conjunto finito $S \subseteq G$, de tal manera que ρ induce una biyección $\phi : S \to T$. Consideremos el mapeo $\mu : A^S \to A$ dado por $\mu(y) = \nu(y \circ \phi^{-1})$ para toda $y \in A^S$. Sea $z \in A^{\overline{S}}$; observe que para cada $s \in S$ se cumple la relación

$$\pi(z)(s) = z(\phi(s)) = (z \circ \phi)(s),$$

es decir, $\pi(z) = z \circ \phi$, de donde se desprende que

$$\pi(z) \circ \phi^{-1} = (z \circ \phi) \circ \phi^{-1} = z.$$

Sea $\tau : A^G \to A^G$ un autómata celular con conjunto memoria S y mapeo local $\mu : A^S \to A$. Si $z \in A^{\overline{S}}$, entonces

$$\overline{\mu}(z) = (\mu \circ \pi)(z) = \mu(\pi(z)) = \nu\left(\pi(z) \circ \phi^{-1}\right) = \nu(z).$$

Se sigue que $\overline{\mu} = \nu$ y $\overline{\tau} = \tau$. Por lo tanto, Φ es sobreyectivo. ■

Sabemos que dado un subgrupo normal $N \trianglelefteq G$, podemos considerar dos G/N-sistemas. Por un lado, $\left(A^{G/N}, \Sigma\right)$ donde Σ es la acción de traslación y $(\mathrm{Fix}(N), \Sigma^*)$, con $\Sigma^* : G/N \times \mathrm{Fix}(N) \to \mathrm{Fix}(N)$ dada por $\rho(g) \cdot x = g \cdot x$, donde $\rho : G \to G/N$ es el homomorfismo canónico. Es interesante observar que estos dos G/N-sistemas son conjugados.

Proposición 3.2.7. *Sea G un grupo y A un conjunto. Para cada subgrupo normal $N \trianglelefteq G$ los G/N-sistemas $\left(A^{G/N}, \Sigma\right)$ y $(\mathrm{Fix}(N), \Sigma^*)$ son conjugados.*

Demostración. El inciso iv) de la Proposición 3.2.2 y la Proposión 3.2.4 nos garantizan que el mapeo $\rho^* : A^{G/N} \to \mathrm{Fix}(N)$ dado por $\rho^*(y) = y \circ \rho$ para todo $A^{G/N}$ es un homeomorfismo G/N-equivariante, es decir, una conjugación de los sistemas $\left(A^{G/N}, \Sigma\right)$ y $(\mathrm{Fix}(N), \Sigma^*)$. ■

Proposición 3.2.8. *Sea G un grupo, A un conjunto finito. Sea $X \subseteq A^G$ un subshift y $f : X \to A^G$ un mapeo G-equivariante continuo. Entonces existe un autómata celular $\tau : A^G \to A^G$ tal que $f = \tau|_X$.*

Demostración. De la continuidad de f, se sigue que el mapeo $\pi_e \circ f : X \to A$ también es continuo. Luego para cada $x \in X$ existe un básico $V(x, S_x) = \{x \in X : \ x|_{S_x} = y|_{S_x}\}$ ($S_x \subseteq G$ finito) tal que $(\pi_e \circ f)(V(x, S_x)) \subseteq \{(\pi_e \circ f)(x)\} = \{f(x)(e)\}$. Lo anterior equivale a decir que si $y, z \in V(x, S_x)$, entonces $f(y)(e) = f(z)(e)$.
Por otro lado, la familia de abiertos $\mathcal{K} = \{V(x, S_x) : \ x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Pero X es compacto al ser un subconjunto cerrado del compacto A^G, así que la cubierta $\mathcal{K}$ puede reducirse a una cubierta finita, es decir, existe $F \subseteq X$ finito tal que $\mathcal{K}_F = \{V(x, S_x) : \ x \in F\}$ es cubierta abierta de X. Definamos $S := \bigcup_{x \in F} S_x$. Sean $y, z \in X$ tales que coinciden en S y sea $x_0 \in F$ tal que $y \in V(x_0, S_{x_0})$. Entonces por un lado tenemos que $y|_{S_{x_0}} = x_0|_{S_{x_0}}$, pero como $S_{x_0} \subseteq S$, en particular, se cumple que $y|_{S_{x_0}} = z|_{S_{x_0}}$. Así tenemos que $y|_{S_{x_0}} = x_0|_{S_{x_0}} = z|_{S_{x_0}}$, de tal manera que $x, y \in V(x_0, S_{x_0})$, lo cual implica que $f(y)(e) = f(z)(e)$. Acabamos de demostrar que si dos configuraciones $y, z \in X$ coninciden en S, entonces $f(y)(e) = f(z)(e)$.
Sea $a_0 \in A$. Con lo anterior en mente podemos ver que el mapeo $\mu : A^S \to A$ dado por

$$\mu(u) = \begin{cases} f(x)(e), & \text{si existe } x \in X \text{ tal que } x|_S = u \\ a_0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

está bien definido. Ahora podemos considerar el autómata celular $\tau : A^G \to A^G$ con conjunto memoria S y mapeo local μ. Entonces si $x \in X$ tenemos que

$$\tau(x)(e) = \mu(x|_S) = f(x)(e),$$

luego por G-equivarianza de los mapeos τ y f se sigue que para cada $g \in G$ se cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\tau(x)(g) &= g^{-1} \cdot \tau(x)(e) \\ &= \tau(g^{-1} \cdot x)(e) \\ &= f(g^{-1} \cdot x)(e) \\ &= g^{-1} \cdot f(x)(e) \\ &= f(x)(g).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\tau(x) = f(x)$ para toda $x \in X$, es decir, $\tau|_X = f$. ■

3.3. El número de configuraciones de periodo mínimo

Definición 3.3.1. Sea H un subgrupo de G. Decimos que $x \in A^G$ tiene **periodo mínimo**, o **periodo fundamental** H si $G_x = H$. (c.f. [LM95, Definición 1.1.3.])

En este capítulo nos interesa el número $\psi_H(G; A)$ de configuraciones con periodo mínimo H:

$$\psi_H(G; A) := |\{x \in A^G : G_x = H\}|.$$

En virtud del lemma 2.1.1 a veces es conveniente considerar el conjunto $\{x \in A^G : [G_x] = [H]\}$, donde $[H] := \{gHg^{-1} : g \in G\}$ es la clase de conjugación de H, y su cardinalidad

$$\psi_{[H]}(G; A) := |\{x \in A^G : [G_x] = [H]\}|.$$

Para un subgrupo $H \leq G$ usaremos la notación $\Psi_H := \{x \in A^G : \; G_x = H\}$.

Lema 3.3.1. *Si $H \leq G$, entonces $\psi_H(G; A) = \psi_{gHg^{-1}}(G; A)$ para todo $g \in G$.*

Demostración. Dado $g \in G$, el mapeo $\varphi : \Psi_H \to \Psi_{gHg^{-1}}$ dado por $x \mapsto g \cdot x$ está bien definido pues si $x \in \Psi_H$, el Lema 2.1.1 garantiza que $g \cdot x \in \Psi_{gHg^{-1}}$. Si $x_1, x_2 \in \Psi_H$, entonces se cumplen las relaciones

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Leftrightarrow g \cdot x_1 = g \cdot x_2 \Leftrightarrow g^{-1} \cdot (g \cdot x_1) = g^{-1} \cdot (g \cdot x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

lo cual significa que φ es inyectiva. Además, si $x \in \Psi_{gHg^{-1}}$, entonces nuevamente por el Lema 2.1.1 $G_{g^{-1} \cdot x} = g^{-1}(gHg^{-1})g = H$, es decir, $g^{-1} \cdot x \in \Psi_H$. Así, $g^{-1} \cdot x$ es tal que $\varphi(g^{-1} \cdot x) = x$ y φ es sobreyectivo. ■

El número de G-órbitas cuyo estabilizador es conjugado a H:

$$\alpha_{[H]}(G; A) := |\{Gx : [G_x] = [H]\}|,$$

tiene interesantes conexiones con el grupo $\mathrm{Aut}(A^G)$ de automorfismos de A^G. Por ejemplo, para cada $\tau \in \mathrm{Aut}(A^G)$, $x \in A^G$, tenemos

$$g \cdot x = x \Leftrightarrow \tau(g \cdot x) = \tau(x) \Leftrightarrow g \cdot \tau(x) = \tau(x),$$

es decir, $G_x = G_{\tau(x)}$. Así, $\mathrm{Aut}(A^G)x \subseteq \{y \in A^G : \ G_y = G_x\}$ y $\psi_{G_x}(G; A)$ es una cota superior para la cardinalidad de la $\mathrm{Aut}(A^G)$-órbita de x.

Por otro lado, si el grupo G es finito, la estructura de $\mathrm{Aut}(A^G)$ fue descrita en [CG19, Teorema 3] como

$$\mathrm{Aut}(A^G) \cong \prod_{i=1}^{r} ((N_G(H_i)/H_i) \wr \mathrm{Sym}_{\alpha_i}), \tag{3.3.1}$$

donde $[H_1], \ldots, [H_r]$ es la lista de todas las diferentes clases de conjugación de subgrupos de G, y $\alpha_i = \alpha_{[H_i]}(G; A)$, como se definió anteriormente. Por tanto, la estructura de $\mathrm{Aut}(A^G)$ depende completamente de los grupos cociente $N_G(H_i)/H_i$, que pueden calcularse fácilmente conociendo el grupo G, y de los enteros $\alpha_{[H_i]}(G; A)$, que dependen de $\psi_H(G; A)$. Finalmente, en [BK87; BLR88], los conjuntos de puntos de un período mínimo dado fueron una herramienta fundamental en el estudio de los grupos de automorfismo de los shifts de tipo finito, entre los que se encuentra el grupo $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$.

Proposición 3.3.1. *Sea G un grupo y A un conjunto. Se cumplen las siguientes relaciones:*

i) $\psi_{[H]}(G; A) = |[H]| \, \psi_H(G; A)$,

ii) $\alpha_{[H]}(G; A) \; [G : H] = \psi_{[H]}(G; A)$.

Demostración. Por el Lema 3.3.1 para cada $J \in [H]$ tenemos que $\psi_J(G; A) = \psi_H(G; A)$, luego

$$\psi_{[H]}(G; A) = \left| \bigsqcup_{J \in [H]} \Psi_J \right| = \sum_{J \in [H]} |\Psi_J| = \sum_{J \in [H]} \psi_J(G; A) = \sum_{J \in [H]} \psi_H(G; A) = |[H]| \psi_H(G; A).$$

Por otro lado, sabido que dos subgrupos conjugados son isomorfos, así todos los subgrupos en $[H]$ tienen la misma cardinalidad y por el Teorema Órbita-Estabilizador si $x \in \Psi_H$

$$|Gx| = \frac{|G|}{|G_x|} = \frac{|G|}{|H|} = [G : H],$$

es decir, todas las G-órbitas dentro de $\{x \in A^G : [G_x] = [H]\}$ tienen tamaño $[G : H]$; por tanto, tenemos $\alpha_{[H]}(G; A) \; [G : H] = \psi_{[H]}(G; A)$. ∎

3.3.1. Configuraciones periódicas cuando G es finitamente generado

Para el resto del trabajo, A denotará un conjunto finito con al menos dos elementos y supondremos que $\{0, 1\} \subseteq A$. El conteo de configuraciones de periodo fundamental H tiene sentido si y sólo si $[G : H] < \infty$ tal como lo muestra el siguiente lema.

Lema 3.3.2. *Sea G un grupo y sea H un subgrupo de G. Entonces $\psi_H(G; A)$ es finito si y sólo si $[G : H]$ es finito.*

Demostración. Si $[G:H]$ es finito, entonces $\psi_H(G;A)$ es claramente finito, ya que toda configuración con periodo mínimo H está contenida en $\mathrm{Fix}(H)$ y $|\mathrm{Fix}(H)| = |A|^{[G:H]} < \infty$.

Recíprocamente, supongamos que $[G:H]$ es infinito. Sea $T \subseteq G$ una transversal para el conjunto de cocientes derechos de H en G, es decir, T contiene exactamente un elemento de cada cociente derecho de H en G. Es evidente que $|T| = [G:H]$. Para cada $s \in T$, consideremos la configuración $x_s \in A^G$ definida por

$$x_s(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in Hs \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

para cualquier $g \in G$. Dada $h \in H$, entonces $h \cdot x_s(g) = x_s(h^{-1}g) = x_s(g)$, ya que $h^{-1}g \in Hs$ si y sólo si $g \in Hs$. Por tanto, $H \leq G_{x_s}$. Por otra parte, si $k \in G_{x_s}$, entonces $k \cdot x_s = x_s$; en particular tenemos $(k \cdot x_s)(s) = x_s(k^{-1}s) = x_s(s) = 1$, lo que implica que $k^{-1}s \in Hs$. Por tanto, $k \in H$, lo que demuestra que $G_{x_s} = H$. Como $|T| = [G:H]$ es infinito, hemos construido infinitas configuraciones diferentes con período fundamental H, lo que establece que $\psi_H(G;A)$ es infinito. ■

Para cualquier grupo G, es habitual considerar el conjunto de todos los subgrupos de G ordenados por inclusión. Aquí, vamos a considerar el poset $L(G)$ de todos los subgrupos de G de índice finito ordenados por inclusión. La siguiente es una observación clave para esta sección.

Lema 3.3.3. *El poset $L(G)$ es una retícula. Además, si G es finitamente generado, entonces para todo $H \in L(G)$, el ideal de orden dual principal $V_H = \{K \leq G : H \leq K\}$ es finito, luego $L(G)$ es una retícula localmente finita.*

Demostración. Mostraremos que $L(G)$ es una subretícula de la retícula de sugrupos de G mostrando que es cerrado bajo el supremo, dado por $H \vee J = \langle H \cup J \rangle$, y el ínfimo, dado por $H \wedge J = H \cap J$.

Sean H y K subgrupos de G tales que $H \leq K$. Es bien conocido (ver, por ejemplo [Rom11, Teorema 3.1.3]) que los índices de H y K en G satisfacen, como números cardinales, la relación

$$[G:H] = [G:K][K:H].$$

Por lo tanto, si $[G:H]$ es finito, entonces $[G:K]$ debe ser finito. Esto implica que para cualesquiera $H, J \in L(G)$, se cumple $\langle H \cup J \rangle \in L(G)$. Por otro lado, es también bien conocido (ver, por ejemplo [Rom11, Teorema 3.1.6]) que la intersección de subgrupos de indice finito es un subgrupo de índice finito, así que $H \cap J \in L(G)$, y la primera parte del lema se sigue.

Para la segunda parte, dados $H \in L(G)$ y $K \in V_H$, el índice de K en G debe ser un divisor de $[G:H]$. El resultado se sigue ya que en un grupo finitamente generado hay solo un número finito de subgrupos de un índice finito dado (este es un teorema bien conocido de M. Hall [Hal50]; ver también [Rom11, Teorema 4.20]). ■

El lema anteior nos permite usar la fórmula de inversión de Möbius para el poset $L(G)$ cuando G es finitamente generado. Sea μ la función de Möbius de $L(G)$.

Lema 3.3.4. *Sea H un subgrupo de G. Entonces* $\displaystyle\bigcup_{H \leq K \leq G} \Psi_K = \mathrm{Fix}(H)$.

Demostración. Si $x \in \displaystyle\bigcup_{H \leq K \leq G} \Psi_K$, entonces $x \in \Psi_J$ para algún $J \geq H$, en particular, $x \in \mathrm{Fix}(J) \subseteq \mathrm{Fix}(H)$. Por otro lado, si $x \in \mathrm{Fix}(J)$, entonces $x \in \Psi_{G_x}$ con $G_x \geq H$, y por lo tanto, $x \in \displaystyle\bigcup_{H \leq K \leq G} \Psi_J$. ■

Teorema 3.3.1. *Sea G un grupo finitamente generado, sea H un subgrupo de G de índice finito, y sea A un conjunto finito. Entonces,*

$$\psi_H(G;A) = \sum_{H\leq K\leq G} \mu(H,K)|A|^{[G:K]}.$$

Demostración. Del hecho de que la familia $\{\Psi_K\}_{K\leq G}$ constituye una partición del espacio A^G y en virtud del Lema 3.3.4 se sigue

$$|\mathrm{Fix}(H)| = \sum_{K\geq H} \psi_K(G;A).$$

Por el Lema 3.3.3 esta suma es finita y podemos aplicar el Teorema 3.1.3, con $g(H) = |\mathrm{Fix}(H)|$ y $f(K) = \psi_K(G;A)$, de donde se desprende que

$$\psi_H(G;A) = \sum_{K\geq H} \mu(H,K)|\mathrm{Fix}(K)|.$$

El resultuado se sigue ya que $|\mathrm{Fix}(K)| = |A|^{[G:K]}$ by [Cec+10, Proposición 1.3.3]. ∎

Observación 3.3.1. Note que , para cualesquiera $H, J \in L(G)$, el valor de $\mu(H,J)$ solo depende del intervalo $[H,J]$. Por lo tanto, para calcular $\psi_H(G;A)$ bastará con conocer el subposet $[H,G]$.

Corolario 3.3.2. *Con la notación del Teorema 3.3.1, supongamos que el intervalo de H a G consiste en una cadena $H = H_0 < H_1 < \cdots < H_k = G$. Entonces,*

$$\psi_H(G;A) = |A|^{[G:H]} - |A|^{[G:H_1]}.$$

En particular, si H es un subgrupo maximal de G, entonces

$$\psi_H(G;A) = |A|^{[G:H]} - |A|.$$

Demostración. Por el teorema 3.3.1,

$$\psi_H(G;A) = \sum_{i=0}^{k} \mu(H,H_i)|A|^{[G:H_i]}.$$

Ahora, por la observación 3.1.2:

$$\begin{aligned}
&\mu(H,H_0) = 1,\\
&\mu(H,H_1) = -1,\\
&\mu(H,H_i) = 0, \qquad \forall i = 2,3,\dots,k.
\end{aligned}$$

El resultado se sigue. ∎

Al sustituir la caracterización de los $\psi_H(G;A)$ del Teorema 3.3.1 en las relaciones de la proposición 3.3.1 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.3.3. *Con la notación del Teorema 3.3.1,*

$$\psi_{[H]}(G;A) = |[H]| \sum_{H\leq K\leq G} \mu(H,K)|A|^{[G:K]},$$

$$\alpha_{[H]}(G;A) = \frac{|[H]|}{[G:H]} \sum_{H\leq K\leq G} \mu(H,K)|A|^{[G:K]}.$$

3.3.2. Configuraciones con periodo normal

En esta sección vamos a centrar nuestra atención en el caso en que H es un subgrupo normal de G de índice finito. En este caso, la clase de conjugación de H tiene como único elemento a H mismo, de tal manera que

$$\psi_H(G;A) = \psi_{[H]}(G;A).$$

Denotemos por 1 el subgrupo trivial. El siguiente resultado puede encontrarse en [CG19, Lemma 6].

Lema 3.3.5. *Sea G un grupo y sea H un subgrupo normal de G de índice finito. Entonces,*

$$\psi_H(G;A) = \psi_1(G/H;A) \quad \textit{and} \quad \alpha_{[H]}(G;A) = \alpha_{[1]}(G/H;A).$$

Demostración. Por [Cec+10, Proposition 1.3.7.], existe una biyección G/H-equivariante entre $A^{G/H}$ y $\mathrm{Fix}(H)$. Por lo tanto, por iii) de la proposición 2.1.2 las configuraciones en $A^{G/H}$ con estabilizador trivial están en biyección con las configuraciones en $\mathrm{Fix}(H)$ con estabilizador trivial, es decir, con las configuraciones en A^G con periodo fundamental H. ■

El lema anterior nos permite aplicar la maquinaria de funciones de Möbius de las retículas de subgrupos que han sido desarrolladas para una variedad de grupos finitos (ver p. ej. [DZ21; DL23; Pah93]).

Recordemos que la función de Möbius clásica $\widetilde{\mu}$ del poset de números naturales $\mathbb{N}$ ordenados por divisibilidad está dada por

$$\widetilde{\mu}(d) = \begin{cases} 0, & \text{si } d \text{ tiene un factor primo al cuadrado,} \\ 1, & \text{si } d = 1, \\ (-1)^k, & \text{si } d \text{ es producto de } k \text{ primos distintos.} \end{cases}$$

Usando el Lema 3.3.5, el siguiente resultado da los valores de $\psi_H(G;A)$ en algunos casos particulares cuando H es un subgrupo normal de G.

Lema 3.3.6. *Sea G un grupo finitamente generado, sea H un subgrupo normal de G de índice finito, y sea A un conjunto finito. Sea $n \in \mathbb{N}$, y sea p y p' dos primos distintos.*

1. *Si $G/H \cong \mathbb{Z}_n$, entonces $\psi_H(G;A) = \sum_{d|n} \widetilde{\mu}(d)|A|^{n/d}$.*
2. *Si $G/H \cong \mathbb{Z}_{p^k}$, entonces $\psi_H(G;A) = |A|^{p^k} - |A|^{p^{k-1}}$.*
3. *Si $G/H \cong \mathbb{Z}_{pp'}$, entonces $\psi_H(G;A) = |A|^{pp'} - |A|^p - |A|^{p'} + |A|$.*
4. *Si $G/H \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, entonces $\psi_H(G;A) = |A|^{p^2} - (p+1)|A|^p + p|A|$.*

Demostración. Las partes (1), (2) y (3) a partir del hecho bien conocido $\mu(1,\mathbb{Z}_n) = \widetilde{\mu}(n)$ (ya que la retícula de subgrupos de $\mathbb{Z}_n$ es isomorfa a la retícula de divisibilidad de n). Para la parte (4), basta con observar que el grupo $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ tiene $\frac{p^2-1}{p-1} = p+1$ subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}_p$ (ya que cada uno de los p^2-1 elementos no triviales de $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ generan un subgrupo con $p-1$ elementos no triviales), lo cual completa la cuenta de todos los subgrupos propios no triviales. ■

En el resto de la sección, nos vamos a enfocar en la determinación exacta de pequeños valores de $\alpha_{[H]}(G;A)$. La inspiración de esta cuestión es el Lema 5 en [CG19], el cual establece, sin el uso de la función de Möbius, que $\alpha_{[H]}(G;A) = 1$ si y solo si $[G:H] = 2$ y $|A| = 2$. En general, la clasificación de pequeños valores de $\alpha_{[H]}(G;A)$ es relevante ya que clasifica las configuraciones con $\mathrm{Aut}(A^G)$-órbitas pequeñas, y, cuando G es finito, estos clasifican los órdenes pequeños de los grupos simétricos que aparecen en la descomposición de (3.3.1) of $\mathrm{Aut}(A^G)$.

Para $x \in A^G$, tenemos $G_x = G$ si y sólo si x es una configuración constante. Ya que tenemos exactamente $|A|$ configuraciones constantes en A^G, se sigue que $\alpha_{[G]}(G;A) = |A|$. En consecuencia, vamos a excluir el caso $H = G$ en el siguiente Teorema. Además, excluimos el caso degenerado $|A| = 1$.

G/H \ $|A|$	2	3	4	5
$\mathbb{Z}_2$	1	3	6	10
$\mathbb{Z}_3$	2	8	20	40
$\mathbb{Z}_2^2$	2	15	54	140
$\mathbb{Z}_4$	3	18	60	150
$\mathbb{Z}_5$	6	48	204	624
S_3	7	108	650	2540
$\mathbb{Z}_6$	9	116	670	2580
$\mathbb{Z}_7$	18	312	2340	11160

Cuadro 3.1: Valores pequeños para $\alpha_{[H]}(G;A)$ con H normal en G.

Teorema 3.3.4. *Sea G un grupo finitamente generado, sea H un subgrupo normal propio de G de índice finito, y sea A un conjunto finito con al menos dos elementos.*

1. $\alpha_{[H]}(G;A) = 1$ *si y sólo si* $|A| = 2$ *y* $[G:H] = 2$.
2. $\alpha_{[H]}(G;A) = 2$ *si y sólo si* $|A| = 2$ *y* $[G:H] = 3$, *o* $|A| = 2$ *y* $G/H \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.
3. $\alpha_{[H]}(G;A) = 3$ *si y sólo si* $|A| = 3$ *y* $[G:H] = 2$, *o* $|A| = 2$ *y* $G/H \cong \mathbb{Z}_4$.
4. $\alpha_{[H]}(G;A) = 6$ *si y sólo si* $|A| = 2$ *y* $[G:H] = 5$, *o* $|A| = 4$ *y* $[G:H] = 2$.
5. $\alpha_{[H]}(G;A) = 7$ *si y sólo si* $|A| = 2$ *y* $G/H \cong S_3$.
6. $\alpha_{[H]}(G;A) = 8$ *si y sólo si* $|A| = 3$ *y* $[G:H] = 3$.
7. $\alpha_{[H]}(G;A) = 9$ *si y sólo si* $|A| = 2$ *y* $G/H \cong \mathbb{Z}_6$.
8. $\alpha_{[H]}(G;A) = 10$ *si y sólo si* $|A| = 5$ *y* $[G:H] = 2$.
9. $\alpha_{[H]}(G;A) \neq 4$ *y* $\alpha_{[H]}(G;A) \neq 5$.

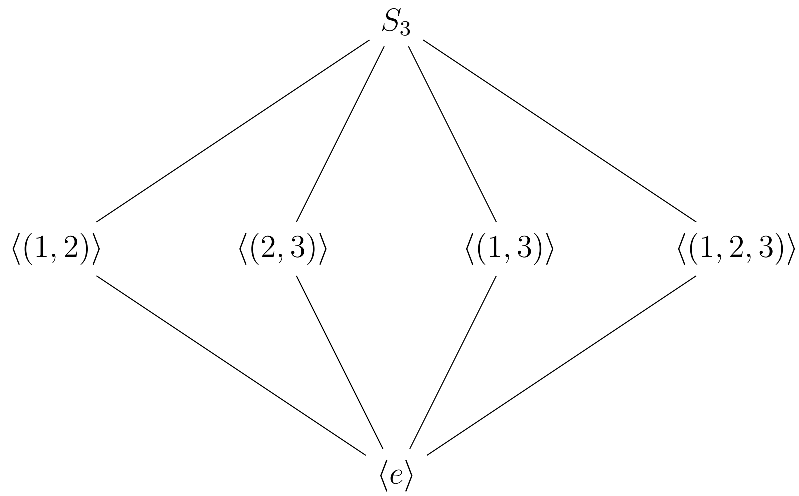


Figura 3.1: Retícula de subgrupos de S_3.

Demostración. Por el corolario 1.7.2 in [GJS16],

$$|A|^{[G:H]} - |A|^{[G:H]-1} \leq \alpha_{[1]}(G/H, A) = \alpha_{[H]}(G; A).$$

(Esta cota inferior ha sido mejorada en el Teorema 5 en [CG19], pero la de arriba es suficiente para esta demostración). Por lo tanto, vemos que $\alpha_{[1]}(G/H, A)$ es una función estrictamente creciente tanto en $[G : H]$ como en $|A|$. La tabla 3.1 muestra todos los valores de $\alpha_{[1]}(G/H, A)$ con $[G : H] \leq 7$ y $|A| \leq 5$. La mayoría de esos valores pueden ser calculados usando las fórmulas del Lema 3.3.6; la única excepción es el caso $G/H \cong S_3$, el cual puede ser calculado directamente usando la función de Möbius de la retícula de subgrupos de S_3 (ver la Figura 3.1). El resultao se sigue por inspección de la tabla 3.1. ∎

Capítulo 4

Una nota sobre el grupo de automorfismos de ICA(A^G).

4.1. Autómatas celulares generalizados

En [Cas+23] se introduce una noción de autómata celular generalizado. Dados dos grupos G y H denotamos por $\mathrm{Hom}(H,G)$ el conjunto de homomorfismos de H en G. Sea A un conjunto finito con almenos dos elementos. Para cualquier $\phi \in \mathrm{Hom}(H,G)$, un ϕ-autómata celular de A^G a A^H es un mapeo $\tau : A^G \to A^H$ tal que existe un subconjunto finito $S \subseteq G$, el cual diremos que es un *conjunto memoria* de τ, y un *mapeo local* $\mu : A^S \to A$ que satisface la relación

$$\tau(x)(h) = \mu\left((\phi(h^{-1}) \cdot x)|_S\right), \ \forall x \in A^G, h \in H.$$

Este concepto generaliza a los autómatas celulares "clásicos" pues cada autómata celular sobre A^G es un id_G-autómata celular. Sin embargo, también podemos definir un ϕ-autómata celular de A^G en A^G tomando a ϕ como un automorfismo no trivial de G.

Observación 4.1.1. El homomorfismo que define un ϕ-autómata celular puede no ser único. Por ejemplo, para cualquier $S \subseteq G$, si $\mu : A^S \to A$ es constante, entonces todo $\phi \in \mathrm{Hom}(H,G)$ define el mismo ϕ-autómata celular.

Si bien los autómatas celulares clásicos tienen la importante propiedad de ser mapeos G-equivariantes, los ϕ-autómatas satisfacen una propiedad más general. Siguiendo a [Cas+23], consideramos la siguiente definición. Sean (X,S) un G-sistema, (Y,T) un H-sistema y $\phi : H \to G$ un homomorfismo de grupos. Un mapeo $\tau : (X,S) \to (Y,T)$ es **ϕ-equivariante** si

$$\tau(\phi(h) \cdot x) = h \cdot \tau(x) \quad \forall h \in H, x \in X.$$

Los autores de [Cas+23] demuestran que estos autómatas generalizados satisfacen tres resultados que son análogos a tres teoremas clave en la teoría de los autómatas celulares clásicos: el Teorema de composición de autómatas, el Teorema de Curtis-Hedlund y el teorema de invertibilidad, los cuales enunciamos a continuación.

Teorema 4.1.1. *Sean G y H grupos y A un conjunto finito. Sean $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}(H,G)$.*

i) La composición $\sigma \circ \tau$ de un ψ-autómata celular σ con conjunto memoria S con un ϕ-autómata celular τ con conjunto memoria T es un $(\phi \circ \psi)$-automata celular con conjunto memoria $\phi(S)T$.

ii) *El mapeo* $\tau : A^G \to A^H$ *es un* ϕ*-autómata celular si y sólo si este es* ϕ*- equivariante y continuo.*

iii) *Si* A *es finito, entonces un* ϕ*-autómata celular* $\tau : A^G \to A^H$ *es invertible (en el sentido de que existe un homomorfismo* $\chi : G \to H$ *y un* χ*-autómata celular* $\sigma : A^H \to A^G$ *tal que* $\tau \circ \sigma = id_{A^H}$ *y* $\sigma \circ \tau = id_{A^G}$*) si y sólo si* τ *es biyectivo.*

4.2. Automorfismos de ICA(A^G)

Una clase importante de autómatas celulares generalizados entre espacios A^G y A^H es la inducida por homemorfismos entre los grupos G y H. Para cada $\phi \in \mathrm{Hom}(H, G)$, definimos $\phi^\star : A^G \to A^H$ mediante

$$\phi^\star(x) = x \circ \phi, \quad \forall x \in A^G.$$

Entonces para cada $h \in H$ se cumple que

$$\phi^\star(x)(h) = x \circ \phi(h) = \left(\phi(h^{-1}) \cdot x\right)(e_G) = \left(\phi(h^{-1}) \cdot x\right)|_{\{e_G\}},$$

donde e_G es la identidad de G. Lo cual siginifica que $\phi^\star$ es un ϕ-autómata celular con conjunto memoria $\{e_G\}$ y mapeo local $\mathrm{id}_A : A^{\{e\}} \to A$ definido mediante $\mathrm{id}_A(x) := x(e)$, para todo $x \in A^{\{e\}}$.

En particular, podemos considerar los elementos de $\mathrm{Aut}(A^G)$ inducidos por automorfismos del grupo G. La filosofía en esta sección es precisamente que todo automorfismo ϕ de G induce un automorfismo de $\mathrm{CA}(A^G)$ vía conjugación por el mapeo $\phi^\star : A^G \to A^G$. Explícitamente, para cada $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, definimos un mapeo $\phi_{\mathrm{CA}} : \mathrm{CA}(A^G) \to \mathrm{CA}(A^G)$ mediante

$$\phi_{\mathrm{CA}}(\tau) := (\phi^{-1})^\star \circ \tau \circ \phi^\star, \quad \forall \tau \in \mathrm{CA}(A^G).$$

A pesar de que el Teorema 4.1.1 nos garantiza varias propiedades que cumple $\phi^\star$ nos gustaría revisar aquellas que nos serán de utilidad.

Lema 4.2.1. *Sean* $\phi : G \to G$ *y* $\psi : G \to G$ *mapeos.*

1. *El mapeo* $\phi^\star : A^G \to A^G$ *es continuo.*
2. $(\phi \circ \psi)^\star = \psi^\star \circ \phi^\star$*.*
3. *Si* ϕ *es un homomorfismo, entonces* $\phi^\star$ *es* ϕ*-equivariante.*

Demostración. 1. Observe que para cada $h \in G$ y $x \in A^G$, tenemos que

$$\pi_h \circ \phi^\star(x) = \pi_h(x \circ \phi) = (x \circ \phi)(h) = x(\phi(h)) = \pi_{\phi(h)}(x).$$

Por lo tanto, el mapeo $\pi_h \circ \phi^\star = \pi_{\phi(h)}$ es continuo para cada $h \in G$ al ser un mapeo de proyección, lo cual demuestra que $\phi^\star$ es continuo.
2. La segunda parte se sigue en virtud de que para cada $x \in A^G$ se cumplen las relaciones

$$(\phi \circ \psi)^\star(x) = x \circ (\phi \circ \psi) = (x \circ \phi) \circ \psi = \phi^\star(x) \circ \psi = \psi^\star(\phi^\star(x)).$$

3. Finalmente, para la tercera parte note que, si $x \in A^G$, entonces para cualesquiera $h, g \in G$ se cumplen las relaciones

$$\phi^\star(\phi(h) \cdot x)(g) = (\phi(h) \cdot x) \circ \phi(g) = \phi(h) \cdot x(\phi(g)) = x(\phi(h^{-1}g)) = \phi^\star(x)(h^{-1}g) = h \cdot \phi^\star(x)(g),$$

así, $\phi^\star(\phi(h) \cdot x) = h \cdot \phi^\star(x)$ y $\phi^\star$ es ϕ-equivariante. ■

Proposición 4.2.1. *Sean $\phi, \psi \in \mathrm{Aut}(G)$.*

1. *Para cada $\tau \in \mathrm{CA}(A^G)$, tenemos $\phi_{\mathrm{CA}}(\tau) \in \mathrm{CA}(A^G)$.*
2. $(\phi \circ \psi)_{\mathrm{CA}} = \phi_{\mathrm{CA}} \circ \psi_{\mathrm{CA}}$.
3. $\phi_{\mathrm{CA}} \in \mathrm{Aut}(\mathrm{CA}(A^G))$.

Demostración. Por el Lema 4.2.1, $\phi_{\mathrm{CA}}(\tau)$ es continuo al ser la composición de mapeos continuos. Ahora observe que para cada $x \in A^G$ y $h \in G$, el punto 3 del Lema 4.2.1 implica que

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathrm{CA}}(\tau)(h \cdot x) &= (\phi^{-1})^\star \circ \tau \circ \phi^\star(h \cdot x) \\
&= (\phi^{-1})^\star \circ \tau(\phi^{-1}(h) \cdot \phi^\star(x)) \\
&= (\phi^{-1})^\star(\phi^{-1}(h) \cdot \tau(\phi^\star(x))) \\
&= \phi\phi^{-1}(h) \cdot ((\phi^{-1})^\star \circ \tau \circ \phi^\star)(x) \\
&= h \cdot \phi_{\mathrm{CA}}(\tau)(x).
\end{aligned}$$

Esto muestra que $\phi_{\mathrm{CA}}(\tau)$ es G-equivariante. Por lo tanto, por el Teorema de Curtis-Hedlund [Cec+10, Theorem 1.8.1], $\phi_{\mathrm{CA}}(\tau) \in \mathrm{CA}(A^G)$.

Para la segunda parte, el Lema 4.2.1 implica que para todo $\tau \in \mathrm{CA}(A^G)$,

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \psi)_{\mathrm{CA}}(\tau) &= ((\phi \circ \psi)^{-1})^\star \circ \tau \circ (\phi \circ \psi)^\star \\
&= (\psi^{-1} \circ \phi^{-1})^\star \circ \tau \circ (\phi \circ \psi)^\star \\
&= (\phi^{-1})^\star \circ (\psi^{-1})^\star \circ \tau \circ \psi^\star \circ \phi^\star \\
&= \phi_{\mathrm{CA}} \circ \psi_{\mathrm{CA}}(\tau).
\end{aligned}$$

Para la tercera parte, es sencillo verificar que ϕ_{CA} es un homomorfismo de $\mathrm{CA}(A^G)$ ya que es inducido mediante conjugación por $\phi^\star$:

$$\phi_{\mathrm{CA}}(\tau_1 \circ \tau_2) = (\phi^{-1})^\star \circ (\tau_1 \circ \tau_2) \circ \phi^\star = [(\phi^{-1})^\star \circ \tau_1 \circ \phi^\star] \circ [(\phi^{-1})^\star \circ \tau_2 \circ \phi^\star] = \phi_{\mathrm{CA}}(\tau_1) \circ \phi_{\mathrm{CA}}(\tau_2).$$

Además, es un automorfismo, pues por la parte 2, el inverso de ϕ_{CA} es $(\phi^{-1})_{\mathrm{CA}}$. ■

Corolario 4.2.1. *El mapeo $\Phi : \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{CA}(A^G))$, definido mediante $\Phi(\phi) = \phi_{\mathrm{CA}}$ para todo $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, es un homomorfismo de grupos.*

Recordemos que un automorfismo α de un monoide M es *interno* si existe un elemento invertible $a \in M$ tal que $\alpha(x) = a^{-1}xa$, para todo $x \in M$. En otras palabras, los automorfismos internos de M son aquellos que son inducidos mediante conjugación por elementos del grupo de unidades $U(M)$. Sea $\mathrm{Inn}(M)$ el conjunto de automorfismos internos de M. Es bien sabido que $\mathrm{Inn}(M)$ es un subgrupo normal de $U(M)$ y que $\mathrm{Inn}(M) \cong U(M)/Z(U(M))$, donde $Z(U(M))$ es el centro del grupo $U(M)$.

Teorema 4.2.2. *Sea $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$. Si ϕ_{CA} es un automorfismo interno de $\mathrm{CA}(A^G)$, entonces $\phi(z) = z$, para todo $z \in Z(G) := \{z \in G : zg = gz, \forall g \in G\}$.*

Demostración. Supongamos que ϕ_{CA} es un automorfismo interno. Entonces existe $\sigma \in \mathrm{ICA}(A^G)$ tal que $\phi_{\mathrm{CA}}(\tau) = \sigma^{-1}\tau\sigma$ para todo $\tau \in \mathrm{CA}(A^G)$. Para cada $z \in Z(G)$, definimos $\tau_z : A^G \to A^G$

mediante $\tau_z(x) := z \cdot x$, para todo $x \in A^G$. Para cada $h \in G$ tenemos que $\pi_h \circ \tau_z = \pi_{g^{-1}h}$ por lo que τ_z es mapeo continuo. Además para cada $x \in A^G$ y $h \in G$ tenemos que se cumplen las relaciones

$$g \cdot \tau_z(x)(h) = (z \cdot x)(g^{-1}h) = (g \cdot x)(z^{-1}h) = z \cdot (g \cdot x)(h) = \tau_z(g \cdot x)(h),$$

lo cual significa que τ_z es id_G-equivariante. Luego $\tau_z \in \mathrm{CA}(A^G)$. Además, para cada $\tau \in \mathrm{CA}(A^G)$ y $x \in A^G$ tenemos que

$$(\tau_z \circ \tau)(x) = z \cdot \tau(x) = \tau(z \cdot x) = \tau \circ \tau_z(x),$$

y se verifica que τ_z conmuta con todo elemento de $\mathrm{CA}(G; A)$. Por lo tanto,

$$(\phi^{-1})^\star \circ \tau_z \circ \phi^\star = \phi_{\mathrm{CA}}(\tau_z) = \sigma^{-1}\tau_z\sigma = \sigma^{-1}\sigma\tau_z = \tau_z.$$

Entonces, para cada $x \in A^G$,

$$\tau_z \circ \phi^\star(x) = \phi^\star \circ \tau_z(x) \;\Rightarrow\; z \cdot \phi^\star(x) = \phi^\star(z \cdot x).$$

Por el Lema 4.2.1,

$$\phi^\star(\phi(z) \cdot x) = z \cdot \phi^\star(x) = \phi^\star(z \cdot x).$$

Ya que $\phi \in \mathrm{Aut}(A^G)$, entonces $\phi^\star$ es biyectivo, así que $\phi(z) \cdot x = z \cdot x$ para todo $x \in A^G$. Ya que $|A| \geq 2$, la acción de G sobre A^G es fiel, así que $\phi(z) = z$ para todo $z \in Z(G)$. ■

Cuando $G = \mathbb{Z}$, y $\phi \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ es el único automorfismo no trivial de $\mathbb{Z}$, i.e. $\phi(k) = -k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, entonces ϕ_{CA} es la así llamada *regla espejo* o *reflexión*, la cual es ampliamente utilizada en el estudio de los autómatas celulares elementales.

Corolario 4.2.3. *La regla espejo no es un automorfismo interno de* $\mathrm{CA}(A^{\mathbb{Z}})$.

Definimos el *grupo de automorfismos externos* de un monoide M como $\mathrm{Out}(M) := \mathrm{Aut}(M)/\mathrm{Inn}(M)$.

Corolario 4.2.4. *Supongamos que G es un grupo abeliano. Entonces, el homomorfismo* $\Psi : \mathrm{Aut}(G) \to Out(\mathrm{CA}(A^G))$ *dado por* $\Psi(\phi) = \phi_{\mathrm{CA}} Inn(\mathrm{CA}(A^G))$ *es inyectivo.*

Demostración. Supongamos que $\phi_{\mathrm{CA}}\mathrm{Inn}(\mathrm{CA}(A^G)) = \psi_{\mathrm{CA}}\mathrm{Inn}(\mathrm{CA}(A^G))$ para algún $\psi, \phi \in \mathrm{Aut}(G)$. Entonces $\psi_{\mathrm{CA}}^{-1} \circ \phi_{\mathrm{CA}}$ es un automorfismo interno de $\mathrm{CA}(A^G)$. Por el Teorema 4.2.2, $\psi^{-1} \circ \phi(z) = z$ para toda $z \in Z(G) = G$, lo cual muestra que $\psi = \phi$. ■

Capítulo 5

El grupo Aut(A^G) no es finitamente generado.

Sea G un grupo y $S \subseteq G$. Para $n \in \mathbb{N}$ definamos $(S \cup S^{-1})^n := \{s_1 s_2 \cdots s_n : \; s_i \in S \cup S^{-1}\}$, donde $S^{-1} = \{s^{-1} : \; s \in S\}$. Decimos que G es **finitamente generado** si S es finito y

$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (S \cup S^{-1})^n \cup \{e\}.$$

En este capítulo vamos a compartir algunas observaciones respecto al problema siguiente:

Problema 4. *Sea G un grupo infinito y A un conjunto; determinar si el grupo* Aut(A^G) *de autómatas celulares invertibles sobre A^G es finitamente generado.*

5.1. Antecedentes

El antecedente más representativo del Problema 4 se encuentra en el trabajo de Boyle, Lind y Rudolph [BLR88] donde demuestran que el grupo de automorfismos de un $\mathbb{Z}$-shift de tipo finito no es finitamente generado. Sin embargo, una variante de este problema consiste en preguntarnos si el monoide de endomorfimos del full G-shift es finitamente generado (G inifito). Dado un alfabeto finito A, en [Cas22] se considera el problema de determinar si el monoide Aut(A^G) es finitamente generado y se demuestra que en efecto Aut(A^G) no es finitamente generado para varias familias de grupos, utilizando el concepto de rank. El *rank* de un monoide M es la cardinalidad mínima de un conjunto generador,

$$\mathrm{Rank}(M) := \mathrm{mín}\{|T| : M = \langle T \rangle\}.$$

Por otro lado, dado un subconjunto U de un monoide M, el *rank relativo* de U en M es

$$\mathrm{Rank}(M : U) = \mathrm{mín}\{|W| \;\; M = \langle U \cup W \rangle\}.$$

A continuación discutimos brevemente la técnica que utilizó el Dr. Alonso Castillo Ramírez.

En primer lugar consederamos el siguiente resultado básico de teoría de monoides finitos.

Lema 5.1.1. *Sea M un monoide finito y U el grupo de unidades de M.*

1. *Si $\Gamma \subseteq M$ es tal que $\langle \Gamma \rangle = M$, entonces $\langle \Gamma \cap U \rangle = U$; en particular, todo conjunto generador para M contiene un conjunto generador para U.*

2. $\mathrm{Rank}(M) = \mathrm{Rank}(M : U) + \mathrm{Rank}(U)$.

Demostración. 1. Es claro que $\langle \Gamma \cap U \rangle \subseteq U$. Ahora si $u \in U$, entonces existen $\gamma_1, ..., \gamma_r \in \Gamma$ tales que $u = \gamma_1 \cdots \gamma_r$. Ya que u es invertible se tiene que cada γ_i es invertible, es decir, $\gamma_1, ..., \gamma_r \in \Gamma \in U$. Luego $u \in \langle \Gamma \cap U \rangle$.

2. Supongamos que Γ es un conjunto generador minimal para M, entonces por el inciso 1. Γ contiene un conjunto generador S para el grupo de unidades U. Sin embargo, un producto $m_1 \cdots m_k$ de elementos en M está en U si y sólo si cada m_i está en U, lo cual implica que S es conjunto generador minimal, pues en caso contrario Γ no lo sería. ■

Si aplicamos el Lema 5.1.1 al monoide $\mathrm{CA}(A^G)$ con G un grupo finito y A un conjunto finito, se tiene la siguiente relación

$$\mathrm{Rank}(\mathrm{Aut}(A^G)) \leq \mathrm{Rank}(\mathrm{CA}(A^G)). \tag{5.1.1}$$

En [Cas22] se demuestra además la siguiente proposición, donde la expresión $r_2(G)$ denota el número de clases de conjugación $[H]$ tales que H tiene índice 2 en G.

Proposición 5.1.1. *Sea G un grupo finito y A un conjunto finito de cardinalidad $q \geq 2$. Entonces*

$$\mathrm{Rank}(\mathrm{Aut}(A^G)) \geq \begin{cases} r(G) - r_2(G), & \textit{si } q = 2 \\ r(G), & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora consideremos un conjunto arbitrario A y un grupo G. Recordemos que dado un subgrupo normal $N \subseteq G$, la Prosición 3.2.6 nos proporciona un epimorfismo de monoides $\Phi : \mathrm{CA}(A^G) \to \mathrm{CA}(A^{G/N})$. La imagen bajo Φ de un conjunto generador minimal para $\mathrm{CA}(A^G)$ es un conjunto generador de $\mathrm{CA}(A^{G/N})$ (no necesariamente minimal). Luego se cumple la relación:

$$\mathrm{Rank}\left(\mathrm{CA}(A^{G/N})\right) \leq \mathrm{Rank}\left(\mathrm{CA}(A^G)\right). \tag{5.1.2}$$

Con esto en mente se prueba el siguiente resultado.

Teorema 5.1.1. *Sea G un grupo tal que existe una cadena descendente infinita*

$$G > N_1 > N_2 > \cdots$$

tal que, para todo $i \geq 1$, N_i es un subgrupo normal de índice finito en G. Entonces, $\mathrm{CA}(A^G)$ no es finitamente generado.

Demostración. Dado un grupo finito K, sea $n(K)$ el número de subgrupos normales de K. Sean $[H_1], [H_2], ..., [H_r]$ las clases de conjugación de subgrupos de K. Ya que los subgrupos normales de K están en biyección con las clases de conjugación de subgrupos de K de cardinalidad 1, tenemos que $n(K) \leq r$.

Para cada $i \geq 1$, N_i es un subgrupo normal de índice finito en G, y entonces G/N_i es un grupo finito. Por el teorema de correspondencia (ver Teorema 4.9 de [Rom11]), $n(G/N_i) \geq i + 1$, ya que hay al menos $i + 1$ subgrupos normales intermedios entre G y N_i (digamos, G, $N_1 ...$, N_i).

Aplicando las relaciones 5.1.2 y 5.1.1, así como la Proposición 5.1.1 las siguientes desigualdades se cumplen para $i \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Rank}(\mathrm{CA}(A^G)) &\geq \mathrm{Rank}(\mathrm{CA}(A^{G/N_i}))\\ &\geq \mathrm{Rank}(\mathrm{Aut}(A^{G/N_i}))\\ &\geq r(G/N_i) - r_2(G/N_i)\\ &\geq n(G/N_i) - r_2(G/N_i)\\ &\geq (i+1) - 1 = i\end{aligned}$$

ya que hay a lo más un subgrupo de índice 2 en una cadena descendente infita de subgrupos normales de índice finito (ver Teorema 3.1.3 de [Rom11]). Esto implica que $\mathrm{CA}(A^G)$ no es finitamente generado. ■

Un grupo G es *residualmente finito* si para todo $g \in G \setminus \{e\}$ hay un grupo finito K y un homomorfismo $\phi : G \to K$ tal que $\phi(g)$ no es la identidad en K. Algunas clases de grupos que son residualmente finitos son: los grupos finitos, los grupos abelianos finitamente generados, los grupos profinitos, los grupos libres y los grupos lineales finitamente generados. Además, subgrupos, productos directos y sumas directas de grupos residualmente finitos son residualmente finitos.

Un grupo G es *localmente graduado* si todo subgrupo no trivial finitamente generado de G contiene un subgrupo propio de índice finito. Esta clase de grupos incluye a los grupos solubles generalizados y a todos los grupos residualmente finitos.

Precisamente el Teorema 5.1.1 implica que el monoide $\mathrm{CA}(A^G)$ no es finitamente generado cuando G es infinito residualmente finito o infinito localmente graduado. La demostración de estos resultados, insistimos, puede consultarse en el artículo [Cas22].

Considerando los grandes alcances de la estrategia que acabamos de comentar, uno podría pensar en la posibilidad de aplicarla para de mostrar que el grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(A^G)$ no es finitamente generado. La idea subyacente principal es considerar la restricción del homomorfismo $\Phi : \mathrm{CA}(A^G) \to \mathrm{CA}(A^{G/N})$ al grupo de unidades esperando que el homomorfismo $\Phi|_{\mathrm{Aut}(A^G)} : \mathrm{Aut}(A^G) \to \mathrm{Aut}(A^{G/N})$ fuese sobreyectivo y así aplicar la estrategia descrita para demostrar que $\mathrm{Aut}(A^G)$ no es finitamente generado para varias familias de grupos. Esto sugiere en particular, que todo automorfismo de $A^{G/N}$ es inducido por un automorfismo de A^G. Sin embargo, en [KRW92] se muestra el siguiente contraejemplo sugerido por Ulf Fiebig.

Ejemplo 5.1.1. Sea $A = \{0, 1\}$. Por las Proposiciones 3.2.1 y 3.2.3 sabemos que $(\mathrm{Fix}(6\mathbb{Z}), \Sigma|_{\mathrm{Fix}(6\mathbb{Z})})$ (donde Σ es la acción shift de G en $A^{\mathbb{Z}}$) es un subconjunto cerrado y G-invarriante del full shift $A^{\mathbb{Z}}$, es decir un subshift de $A^{\mathbb{Z}}$.

Observe que este subshift es finito; de hecho, por el Corolario 3.2.1 tiene exactamente $|\mathrm{Fix}(6\mathbb{Z})| = |A|^{[\mathbb{Z},6\mathbb{Z}]} = 2^6 = 64$ elementos. La estructura de las $\mathbb{Z}$-órbitas de $\mathrm{Fix}(6\mathbb{Z})$ consta de: 9 órbitas de tamaño 6 de configuraciones en $\Psi_{6\mathbb{Z}}$; 2 órbitas de tamaño 3 de cofiguraciones en $\Psi_{3\mathbb{Z}}$; 1 órbita de tamaño 2 de cofiguraciones en $\Psi_{2\mathbb{Z}}$ y 2 órbitas de tamaño 1 de configuraciones en $\Psi_{\mathbb{Z}}$.

Al ser $\mathrm{Fix}(6\mathbb{Z})$ un espacio totalmente disconexo finito, en realidad $\mathrm{Fix}(6\mathbb{Z})$ tiene la topología discreta. Entonces todo mapeo $\tau : \mathrm{Fix}(6\mathbb{Z}) \to \mathrm{Fix}(6\mathbb{Z})$ que sea biyectivo y G-equivariante es un automorfismo de $(\mathrm{Fix}(6\mathbb{Z}), \Sigma|_{\mathrm{Fix}(6\mathbb{Z})})$.

Sea $\mathcal{O}$ una de las 14 $\mathbb{Z}$-órbitas contenidas en $\mathrm{Fix}(6\mathbb{Z})$. Consideremos el mapeo $\tau_o : \mathrm{Fix}(6\mathbb{Z}) \to \mathrm{Fix}(6\mathbb{Z})$ dado por

$$\tau_o(x) = \begin{cases} 1 \cdot x, & \text{si } x \in \mathcal{O},\\ x, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Es claro que τ_o es una biyección G-equivariante, y por tanto un automorfismo de $(\mathrm{Fix}(6\mathbb{Z}), \Sigma|_{\mathrm{Fix}(6\mathbb{Z})})$.

Sea A un conjunto finito y N un grupo normal de G. Denotemos por $\mathrm{CA}(\mathrm{Fix}(N))$ el monoide de endomorfismos del subshift $\mathrm{Fix}(N) \subset A^G$. La Proposición 3.2.8 nos asegura que el homomorfismo $\Phi' : \mathrm{CA}(A^G) \to \mathrm{CA}(\mathrm{Fix}(N))$ dado por $\tau \mapsto \tau|_{\mathrm{Fix}(N)}$ es sobreyectivo. Sin embargo, el homomorfismo $\Phi^* : \mathrm{Aut}(A^G) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Fix}(N))$ dado por $\tau \mapsto \tau|_{\mathrm{Fix}(N)}$ no lo es en general. En [KRW92] se prueba, como una aplicación de la SGCC (condición de compatibilidad signo-giro), que cuando $G = \mathbb{Z}$ y $N = 6\mathbb{Z}$, se tiene que $\tau_o \notin \mathrm{Im}(\Phi^*)$. Por la Proposición 3.2.7 sabemos que $\mathrm{Fix}(N)$ y $A^{G/N}$ son G/N-sistemas conjugados y se sigue que, en general, el homomorfismo $\Phi|_{\mathrm{Aut}(A^G)} : \mathrm{Aut}(A^G) \to \mathrm{Aut}(A^{G/N})$ no es sobreyectivo. Así la técnica propuesta en [Cas22] no se puede extender en general al grupo de automorfismos.

5.2. Acotando el problema.

Comencemos por analizar algunas condiciones sobre G y A que nos dan una respuesta inmediata a nuestro problema. En breve, veremos que una condición necesaria para que el grupo $\mathrm{Aut}(A^G)$ sea finitamente generado es que A sea finito y que G sea finitamente generado.

Proposición 5.2.1. *Sea G un grupo finitamente generado, entonces G es numerable.*

Demostración. En efecto, si G es generado por un conjunto finito S, entonces $G \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(S \cup S^{-1})^n$. Además, observe que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(S\cup S^{-1})^n$ es numerable, ya que la unión de conjuntos numerables es numerable; se sigue que G es numerable al ser subconjunto de un conjunto numerable. ■

La siguiente proposición es una observación extraida de [Cas22].

Proposición 5.2.2. *El grupo $\mathrm{Aut}(A^G)$ no es finitamente generado si G no es finitamente generado.*

Demostración. Sea G un grupo que no es finitamente generado. Supongamos que $\mathrm{Aut}(A^G)$ tiene un conjunto finito de generadores, digamos $H = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k\}$. Sea S_i un conjunto memoria para cada τ_i. Entonces $G \neq \left\langle \bigcup_{i=1}^{k} S_i \right\rangle$, a continuación consideremos $\tau \in \mathrm{Aut}(A^G)$ tal que su conjunto memoria minimal no está contenido en $G \neq \left\langle \bigcup_{i=1}^{k} S_i \right\rangle$. Ya que el conjunto memoria de la composición de $\tau_i \circ \tau_j$ es $S_iS_j = \{s_is_j \ : \ si \in S_i, s_j \in S_j\}$ (ver Proposición 2.3.2), τ no puede pertenecer al monoide generado por H, lo cual contradice que H sea un conjunto generador para $\mathrm{Aut}(A^G)$. Esto muestra que $\mathrm{Aut}(A^G)$ no pude ser finitamente generado si G no es finitamente generado. ■

Proposición 5.2.3. *Si A es infinito, entonces $\mathrm{Sym}(A)$ no es numerable.*

Demostración. Bastará con probar que $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ no es numerable. Para ver esto, consideremos un mapeo (arbitrario) $\Phi : \mathbb{N} \to \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ con $\Phi(n) = f_n$. Vamos a construir un mapeo $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, de tal manera que por cada $f_k \in \Phi(\mathbb{N})$ definimos dos asignaciones. Para cada $k \in \mathbb{N}$:

$g(2k-1) = 2k$ y $g(2k) = 2k-1$, si $2k-1 \in \mathrm{Fix}(f_k)$;

$g(2k-1) = 2k-1$ y $g(2k) = 2k$, en otro caso.

Observe que por construcción $g \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$, pero $g \notin \Phi(\mathbb{N})$, luego Φ no es sobreyectivo. Así que no existe una biyección entre $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ y $\mathbb{N}$, lo cual significa que $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ no es numerable. ■

Proposición 5.2.4. *Si A es infinito, entonces* $\mathrm{Aut}(A^G)$ *no es finitamente generado.*

Demostración. Podemos considerar los autómatas celulares invertibles inducidos por biyecciones del alfabeto (ver Ejemplo 2.3.5). Como el mapeo local asociado a un autómata celular con conjunto memoria fijo es único, se sigue que por cada elemento en $\mathrm{Sym}(A)$ hay un autómata celular en $\mathrm{Aut}(A^G)$. Por la proposición 5.2.3 tenemos que si A es infinito, el grupo $\mathrm{Aut}(A^G)$ no es numerable y por lo tanto, por la proposición 5.2.1 tampoco es finitamente generado. ■

De las proposiciones 5.2.4 y 5.2.2 se sigue el corolario:

Corolario 5.2.1. *Si el grupo* $\mathrm{Aut}(A^G)$ *es finitamente entonces A es finito y G es finitamente generado.*

5.3. Una estrategia general para demostrar que $\mathrm{Aut}(A^G)$ no es finitamente generado.

En esta sección ofrecemos una estrategia para demostrar que el grupo $\mathrm{Aut}(A^G)$ no es finitamente generado cuando A es un conjunto finito y G un grupo finitamente generado con suficientes subgrupos normales de índice finito.

Para el resto de esta sección asumimos los siguientes atributos en el conjunto A y en el grupo G. Sea A un conjunto finito con $|A| \geq 2$; sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\{0,1\} \subseteq A$. Sea G un grupo finitamente generado tal que posee un conjunto infinito contable $\mathcal{H} = \{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de subgrupos normales de índice finito.

Denotemos por $\Psi_{H_i} := \{x \in A^G : G_x = H_i\}$ el conjunto de configuraciones de periodo fundamental H_i. En vista de que $\Psi_{H_i} \subset \mathrm{Fix}(H)$ y $|\mathrm{Fix}(H_i)| = |A|^{[G:H]}$ (ver Corolario 3.2.1), se sigue que Ψ_{H_i} es finito para cada $i \in \mathbb{N}$.

Lema 5.3.1. *El conjunto Ψ_{H_i} es no vacío para cada $i \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Definamos la configuración $x : G \to A$

$$x(g) := \begin{cases} 1 & \text{si } g \in H_i \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad \forall g \in G.$$

Mostraremos que $x \in \Psi_{H_i}$, es decir que $H_i = G_x$.

Sea $h \in H_i$, entonces $h \cdot x(g) = x(h^{-1}g)$, pero $h^{-1}g \in H_i$ si y sólo si $g \in H$, y se sigue que $h \cdot x(g) = x(g)$ para toda g, es decir, $H_i \leq G_x$.
Por otro lado, si consideramos $\alpha \in G_x$ entonces $\alpha \cdot x(g) = x(\alpha^{-1}g) = x(g)$ para todo $g \in G$. En particular, si $g \in H_i$, entonces $x(\alpha^{-1}g) = x(g) = 1$ y $\alpha^{-1}g = h$ para algún $h \in H_i$, lo cual implica que $\alpha \in H_i$. Luego $G_x \leq H_i$. ■

Denotemos por $S : G \times A^G \to A^G$ la acción shift.

Proposición 5.3.1. *Para cada $i \in \mathbb{N}$ el par $(\Psi_{H_i}, S|_{\Psi_{H_i}})$ es un subsistema (subshift) finito del full shift (A^G, S).*

Demostración. Cada Ψ_{H_i} es finito y por lo tanto subconjunto compacto de A^G (ya que A^G es compacto por el inciso 6 de la Proposición 2.2.1). Además, como A^G es de Hausdorff (ver inciso 4 de la Proposición 2.2.1), entonces Ψ_{H_i} es cerrado.

Ahora consideremos $x \in \Psi_{H_i}$ (equivalentemente $G_x = H_i$) y $g \in G$. Ya que $g \cdot x$ y x están en la misma órbita, sus estabilizadores son conjugados (ver Proposición 2.1.1), así que existe $\alpha \in G$ tal que

$$G_{g \cdot x} = \alpha G_x \alpha^{-1} = \alpha H_i \alpha^{-1} = H_i,$$

donde la última relación se cumple por normalidad del grupo H_i. Luego $g \cdot x \in \Psi_{H_i}$ y $\Psi_{H_i} \subset A^G$ es subconjunto G-invariante.

Por lo tanto, por la observación 2.1.1, para cada $i \in \mathbb{N}$ el par $(\Psi_{H_i}, S|_{\Psi_{H_i}})$ constituye un subshift. ■

Proposición 5.3.2. *Para cada $i \in \mathbb{N}$, el conjunto Ψ_{H_i} es $\mathrm{Aut}(A^G)$-invariante.*

Demostración. Sean $x \in A^G$ y $\tau \in \mathrm{Aut}(A^G)$. En primer lugar, si $h \in H_i$, por G-equivarianza tenemos que $h \cdot \tau(x) = \tau(hx) = \tau(x)$, por lo que $h \in G_{\tau(x)}$, y $H_i \subset G_{\tau(x)}$.

Ahora consideremos $\alpha \in G_{\tau(x)}$. Entonces se cumple $\alpha \cdot \tau(x) = \tau(x)$, es decir, $\tau(\alpha \cdot x) = \tau(x)$. Sin embargo, como τ es invertible se sigue que $\alpha \cdot x = x$, por lo que $\alpha \in G_x = H_i$ y $G_{\tau(x)} \subset H_i$.

Por lo tanto $G_{\tau(x)} = H_i$, $\tau(x) \in \Psi_{H_i}$ y Ψ_{H_i} es conjunto $\mathrm{ICA}(A^G)$-invariante. ■

Definición 5.3.1. Sea G un grupo finitamente generado y sea $\mathcal{F} = \{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de subgrupos normales de índice finito. Diremos que un automorfismo $\tau \in \mathrm{Aut}(A^G)$ *intercambia a dos configuraciones $x, y \in \Psi_{H_k}$ respecto a $\mathcal{F}$* si $\tau(x) = y$, $\tau(y) = x$ y además para $j \leq k$ fija todo punto de Ψ_{H_j} que no pertenezca a las G-órbitas de x o y.

Teorema 5.3.1. *Sea G un grupo finitamente generado tal que pose una familia infinita numerable de subgrupos normales de índice finito $\mathcal{F} = \{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tales que $\psi_{H_i} > [G : H_i]$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Sea A un conjunto finito con $|A| \geq 2$. Si para cada $i \in \mathbb{N}$ existe una involución $\tau_i \in \mathrm{Aut}(A^G)$ tal que intercambia dos configuraciones $x, y \in H_i$ con respecto a $\mathcal{F}$, entonces $\mathrm{Aut}(A^G)$ no es finitamente generado.*

Demostración. Denotemos por $\mathcal{O}_{\Psi_{H_i}} := \{Gx \ : \ x \in \Psi_{H_i}\}$ el conjunto de G-órbitas de elementos en Ψ_{H_i}. Por el Lema 5.3.1 cada Ψ_{H_i} es no vacío; y ya que asumimos que $\psi_{H_i} > [G : H_i]$ para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que cada Ψ_{H_i} contiene al menos dos G-órbitas. Ya que Ψ_{H_i} es finito, el conjunto de órbitas $\mathcal{O}_{\Psi_{H_i}}$ también lo es, digamos con $\mathcal{O}_{\Psi_{H_i}} = \{O_1, ..., O_{\ell_i}\}$. Observe que al ser Ψ_{H_i} conjunto G-invariante se sigue que

$$\Psi_{H_i} = \bigsqcup_{k=1}^{\ell_i} O_k.$$

Por otro lado, para cada $x \in A^G$ y $\tau \in \mathrm{Aut}(A^G)$ se tiene por G-equivarianza que $\tau(Gx) = G\tau(x)$. Además, al ser Ψ_{H_i} conjunto $\mathrm{Aut}(A^G)$-invariante, se sigue que τ induce una permutación $\sigma_\tau^i : \mathcal{O}_{\Psi_{H_i}} \to \mathcal{O}_{\Psi_{H_i}}$. Esta permutación tiene una signatura bien definida al ser $\mathcal{O}_{\Psi_{H_i}}$ finito.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ consideremos el homomorfismo

$$\varphi_i : \mathrm{Aut}(A^G) \to \mathbb{Z}_2,$$

que asigna a cada automorfismo $\tau \in \mathrm{Aut}(A^G)$ la signatura de la permutación σ_τ^i que este induce en el conjunto de órbitas $\mathcal{O}_{\Psi_{H_i}}$, es decir, $\varphi_i(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma_\tau^i)$.

Si para cada $i \in \mathbb{N}$ existe una involución $\tau_i : A^G \to A^G$ que intercambie dos configuraciones en Ψ_{H_i}, entonces el homomorfismo $\Phi_n : \mathrm{Aut}(A^G) \to \prod_{j=1}^{n} \mathbb{Z}_2$ dado por $\Phi_n(\tau) = (\varphi_1(\tau), ..., \varphi_n(\tau))$ será sobreyectivo para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto, si $n = 1$ entonces el automorfismo id_{A^G} cumple con $\varphi_1(\mathrm{id}_{A^G}) = 1$, mientras que la involución $\tau_1 : A^G \to A^G$ es una transposición de $\mathcal{O}_{\Psi_{H_i}}$ por lo que $\varphi_1(\tau_1) = -1$; luego $\Phi_1 : \mathrm{Aut}(A^G) \to \mathbb{Z}_2$ es sobreyectivo. Ahora supongamos que $\Phi_k : \mathrm{Aut}(A^G) \to \prod_{j=1}^{k} \mathbb{Z}_2$ es sobreyectivo para algún $k \geq 1$. Para cada $\beta = (\beta_1, ..., \beta_{k+1}) \in \prod_{j=1}^{k+1} \mathbb{Z}_2$ existe $\beta' = (\beta'_1, ..., \beta'_k) \in \prod_{j=1}^{k} \mathbb{Z}_2$ tal que $\beta_i = \beta'_i$ para todo $i \leq k$. Además por sobreyectividad de Φ_k existe $\tau_{\beta'} \in \mathrm{Aut}(A^G)$ tal que $\Phi_k(\tau_{\beta'}) = \beta'$. Así, al ser τ_{k+1} una transposición que intercambia dos puntos en $\Psi_{H_{k+1}}$ tenemos que, si $\varphi_{k+1}(\tau_{\beta'}) = \pm 1$ entonces $\varphi_{k+1}(\tau_{k+1} \circ \tau_{\beta'}) = \mp 1$, y por lo tanto, con seguridad $\beta \in \{\Phi_{k+1}(\tau_{\beta'}), \Phi_{k+1}(\tau_{k+1} \circ \tau_{\beta'})\}$, lo cual significa que $\Phi_{k+1} : \mathrm{Aut}(A^G) \to \prod_{j=1}^{k+1} \mathbb{Z}_2$ es homomorfismo sobreyectivo.

Por el primer teorema de isomorfía tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes relaciones

$$\mathrm{Aut}(A^G)/\mathrm{Ker}(\Phi_n) \cong \prod_{k=1}^{n} \mathbb{Z}_2,$$

de donde se sigue que

$$\mathrm{Rank}(\mathrm{Aut}(A^G)/\mathrm{Ker}(\Phi_n)) = \mathrm{Rank}\left(\prod_{k=1}^{n} \mathbb{Z}_2\right) \leq \mathrm{Rank}(\mathrm{Aut}(A^G)),$$

y $\mathrm{Aut}(A^G)$ no es finitamente generado. ■

5.4. El grupo de automorfismos de $A^{\mathbb{Z}}$ no es finitamente generado.

En [BLR88] los autores demuestran que el grupo de automorfimos de un full $\mathbb{Z}$-shift con alfabeto finito no es fintamente generado. En esta sección discutimos la técnica que usaron para tal propósito.

5.4.1. Conceptos báscios de dinámica simbólica sobre $\mathbb{Z}$

Sean A un conjunto finito con $\{0, 1\} \subseteq A$ y $I_n := \{k \in \mathbb{N} : \ 1 \leq k \leq n\}$. Una **palabra** o **bloque** u sobre A es un mapeo $u : I_n \to A$ para algún entero n, es decir, una sucesión finita $u = u_1 u_2 \cdots u_n$ de símbolos en A. El **bloque vacío**, denotada por ε corresponde a caso $n = 0$. La **longitud** de un bloque es la cantidad de términos de la sucesión y se denota por $|u|$. Denotamos por $B_n(A^{\mathbb{Z}})$ el conjunto de bloques de longitud n. El conjunto de todos los bloques sobre A lo denotamos por $B(A^{\mathbb{Z}})$, decir,

$$B(A^{\mathbb{Z}}) := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n(A^{\mathbb{Z}}).$$

Dado $W = w_1 w_2 \cdots w_n \in B_n(A^{\mathbb{Z}})$, $W[i, j]$ denota la subsucesión finita $w_i \cdots w_j$. Podemos pensar una configuración $x \in A^{\mathbb{Z}}$ como una sucesión bi-infinita $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$x = ...x_{-2}x_{-1}.x_0 x_1 x_2...$$

donde cada $x_i \in A$. Así por ejemplo, si $x = ...010.10101010...$, entonces $x_{-3} = 0, x_{-2} = 1, x_{-1} = 0, x_1 = 1, x_2 = 0$, etc.

Si $x = ...x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2... \in A^{\mathbb{Z}}$, definimos $x_{[i,j]} := x_ix_{i+1}\cdots x_{j-1}x_j$, $x_{[i,\infty)} := x_ix_{i+1}\cdots$, $x_{(-\infty,i]} = \cdots x_{i-1}x_i$. Adoptamos la convención de que si $i > j$, entonces $x_{[i,j]} := \varepsilon$. Dados $u \in B(A^{\mathbb{Z}})$ y $x \in A^{\mathbb{Z}}$, diremos que u **ocurre en** x, o también que u **es palabra** (o **bloque**) **de** x, lo cual denotamos por $u \sqsubseteq x$, si existen enteros i, j tales que $x_{[i,j]} = u$. La palabra vacía ocurre en cualquier configuración de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. El $(2k+1)$**-bloque central** de x es $x_{[-k,k]}$. Sea $u = u_0\cdots u_{n-1} \in B(A^{\mathbb{Z}})\setminus\{\varepsilon\}$, entonces denotamos por u^∞ a la configuración $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que para todo $i \in \mathbb{Z}$, $x_i = u_{i \text{ mód } n}$, es decir,

$$u^\infty := \cdots uuuuuu.uuuuuu\cdots = \cdots u_0\cdots u_{n-1}u_0\cdots u_{n-1}.u_0\cdots u_{n-1}u_0\cdots u_{n-1}\cdots$$

Consideremos el full $\mathbb{Z}$-shift $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$. Es común usar la notación $\sigma^n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$ para denotar la transformación $n \cdot x$.

Proposición 5.4.1. *Una configuración $x \in A^{\mathbb{Z}}$ es $n\mathbb{Z}$-periódica y sólo si $\sigma^n(x) = x$. Además x tiene periodo fundamental $n\mathbb{Z}$ si y sólo si $\sigma^n(x) = x$, pero $\sigma^k(x) \neq x$ para $0 < k < n$.*

Demostración. Si x es $n\mathbb{Z}$-periódica entonces $n\mathbb{Z} \subseteq G_x$, lo cual significa que $\sigma^k(x) = x$ para cada $k \in n\mathbb{Z}$, en particular se cumple para $n = k$. Por otro lado, si asumimos que $\sigma^n(x) = x$ por propiedades de la acción tenemos que para todo $k \in \mathbb{Z}$ se cumple $\sigma^{kn}(x) = (\underbrace{\sigma^n \circ \cdots\cdots \circ \sigma^n}_{k-\text{ veces}})(x) = x$, luego $n\mathbb{Z} \subseteq G_x$ y x es $n\mathbb{Z}$-periódica.

Ahora supongamos que x tiene periodo fundamental $n\mathbb{Z}$, entonces $G_x = n\mathbb{Z}$, es decir, $\sigma^m(x) = x$ si y sólo si m es un múltiplo de n, lo cual es equivalente a que $\sigma^k(x) \neq x$ si y sólo si $k \equiv i \pmod n$ para $0 < i < n$. Además por biyectividad de σ tenemos que esta última condición es equivalente a $\sigma^k(x) \neq x$ si y sólo si $0 < k < n$ y el resultado se sigue. ■

Una **configuración periódica** (**o punto periódico**) es una configuración $x \in A^{\mathbb{Z}}$ tal que $\sigma^n(x) = x$ para algún $n > 0$, y diremos que x tiene **periodo** n. Una configuración periódica $x \in A^{\mathbb{Z}}$ tiene **periodo mínimo** n si $\sigma^n(x) = x$, pero $\sigma^k(x) \neq x$ para $0 < k < n$; en otras palabras el menor entero positivo n para el cual $\sigma^n(x) = x$ es el periodo mínimo de x. Denotaremos por Q_n el conjunto de configuraciones de periodo mínimo n, es decir,

$$Q_n := \{x \in A^{\mathbb{Z}} :\ G_x = n\mathbb{Z}\}.$$

La $\mathbb{Z}$-**órbita** de una configuración $x \in A^{\mathbb{Z}}$ será denotada mediante $\mathcal{O}(x)$. Una órbita $\mathcal{O}(x)$ es llamada **órbita periódica** si x es una configuración periódica; recíprocamente decimos que una órbita periódica está dada por un bloque $w \in B_n(A^{\mathbb{Z}})$ si contiene al punto periódico que está dado por el bloque w, es decir, a w^∞.

Definición 5.4.1. Sea $1 \leq i < n$, $W \in B_n(A^{\mathbb{Z}})$. Denotamos por $\sigma^i(A)$ la i-ésima **permutación cíclica** de A: $A[i,n]A[1,i-1]$.

Observación 5.4.1. Con la notación anterior note que se cumple la relación $\sigma^i(A^\infty) = (\sigma^i(A))^\infty$.

Proposición 5.4.2. *Sea $W \in B_n(A^{\mathbb{Z}})$, tal que W^∞ es de periodo mínimo n. Entonces W solo puede ocurrir en WW como su primera o segunda mitad.*

Demostración. Sea $B := WW$ y supongamos que $W = B[i, i+n-1]$ con $1 < i < n$. Entonces $W[i,n] = W[1, n-i+2]$ y $W[1, i-1] = W[n-i-2, n]$, lo cual implica, $\sigma^i(W) = W[i,n]W[1,i-1] = W$. Sin embargo, la útima relación implica que $\sigma^i(W^\infty) = \sigma^i(W)^\infty = W^\infty$ contradiciendo el hecho de que W^∞ tiene periódo mínimo n. ■

5.4.2. El teorema de intercambio de órbitas para el $\mathbb{Z}$-Full Shift

Lema 5.4.1. *Sean $W_1, W_2 \in B_n(A^{\mathbb{Z}})$, $W_1 \neq W_2$. Existen permutaciones cíclicas $\sigma^i(W_1), \sigma^i(W_2)$ tales que $(\sigma^i(W_1)\sigma^i(W_2))^\infty \in Q_{2n}$.*

Demostración. Su pongamos que $(W_1W_2)^\infty$ tiene periodo mínimo $\frac{2n}{m} < 2n$. Entonces podemos escribir $W_1W_2 = C^m$ con $m \geq 3$ e impar ($m = 1$ implica que $C = W_1W_2$;por otro lado, si m es par la condición periodo mínimo menor a $2n$ implica que $W_1 = W_2$). Luego $|C|$ es par. Así podemos escribir $C = DE$ donde $|D| = |E|$ y $D \neq E$ (si permitimos $D = E$ tendremos que $W_1 = W_2$). Ahora podemos escribir:

$$\begin{aligned} W_1W_2 &= \underbrace{CC\cdots C}_{m\text{-veces}} \\ &= (DE)^m \\ &= D(ED)^{\frac{m-1}{2}} \cdot E(DE)^{\frac{m-1}{2}} \end{aligned}$$

es decir, $W_1 = D(ED)^q$ y $W_2 = E(DE)^q$ con $q = \frac{m-1}{2}$.
Definamos

$$F := \sigma^{|D|}(W_1)\sigma^{|D|}(W_2) = (ED)^qD(DE)^qE = (ED)^{q-1}EDDDE(DE)^{q-1}E.$$

Supongamos que F^∞ tiene periodo $k < 2n$. En vista de que $D \neq E$, se sigue que $k < n$; además como $q \geq 1$ tenemos que $4q + 2 \leq 6q$ y se cumple la relación:

$$k \leq \frac{2n}{3} = \frac{4q+2}{3}|D| \leq 2q|D|.$$

Observe que siempre es posible encontrar un entero ℓ tal que $|D| \leq \ell k \leq 2q|D|$. En efecto, si $k \geq |D|$ entonces bastará con hacer $\ell = 1$. Si $k < |D|$ hacemos ℓ el menor entero tal que $\ell k > |D|$, y se sigue que $|D| - \ell k \leq k$; así podemos escribir $\ell k = |D| + \varepsilon$ donde $\varepsilon \leq k$ y tenemos que $\ell k = |D| + \varepsilon \leq |D| + k < 2|D| \leq 2q|D|$.

Recordemos que $C^\infty = (DE)^\infty$ tiene periodo mínimo $|DE|$. Luego DE ocurre en $DEDE$ sólo como su primera o segunda mitad, de donde se desprende que D ocurre en DE sólo como su primer mitad y E ocurre en DE sólo como su segunda mitad. Por lo tanto, al considerar la permutación cíclica $\sigma^{\ell k}(F) = F$ se sigue que el bloque DDD debe contener a DE o a ED como subbloque, implicando que $D = E$, una contradicción. Entonces $F^\infty \in Q_{2n}$. ■

Definición 5.4.2. Si $x, y \in Q_n$, decimos que $\varphi \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ **intercambia** x **e** y si $\varphi(x) = y$, $\varphi(y) = x$ y φ fija todos las configuraciones cuya $\mathbb{Z}$-órbita tiene longitud menor o igual que n y no contienen ni a x ni a y. Denotamos este mapeo mediante $\varphi : x \leftrightarrow y$.

Teorema 5.4.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in Q_n$ configuraciones con $\mathcal{O}(x) \neq \mathcal{O}(y)$. Entonces existe una involución $\varphi \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ que intercambia x e y.*

Demostración.

Ya que $x, y \in Q_n$, existen palabras W_1', W_2' de longitud n tales que $x = (W_1')^\infty$ y $y = (W_2')^\infty$. Ya que x e y tienen órbitas distintas, ninguna permutación cíclica de W_1' es igual a W_2', en particular, $W_1' \neq W_2'$. Así que por el Lema 5.4.1 existe i tal que $(\sigma^i(W_1')\sigma^i(W_2'))^\infty$ posee periodo mínimo $2n$. Sean pues $W_1 := \sigma^i(W_1')$ y $W_2 := \sigma^i(W_2')$. Por $\mathbb{Z}$-equivarianza tenemos que $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(W_1^\infty)$, $\mathcal{O}(y) = \mathcal{O}(W_2^\infty)$ y un automorfismo φ intercambia x e y si y sólo si φ intercambia a W_1^∞ y W_2^∞. Por lo cual podemos trabajar con las configuraciones W_1^∞ y W_2^∞ sin problema.

Consideremos el conjunto de *marcos* en W_1 y W_2:

$$M(W_1, W_2) = \{w \in \mathcal{B}_{5n} : \ w = B_1B_2B_3B_4B_5, \ B_i \in \{W_1, W_2\}\}.$$

Y para $0 \leq l < n$ definimos los conjuntos:

$$E_l(W_1) := \{x \in A^\mathbb{Z} : \ x_{-l} \cdots x_{-l+n-1} = W_1, \ x_{-l+kn} \cdots x_{-l+(k+1)n-1} \in \{W_1, W_2\}, k = -2, -1, 1, 2\}$$

y

$$E_l(W_1) := \{x \in A^\mathbb{Z} : \ x_{-l} \cdots x_{-l+n-1} = W_2, \ x_{-l+kn} \cdots x_{-l+(k+1)n-1} \in \{W_1, W_2\}, k = -2, -1, 1, 2\}.$$

Observe que $E_l(W_i)$ es el conjunto de configuraciones $x \in A^\mathbb{Z}$ tales que $x_{[-l-2n, -l+3n-1]}$ es un marco cuyo bloque central B_3 es W_i. Además, es claro que $E_l(W_1) \cap E_l(W_2) = \varnothing$ para $0 \leq l < n$.

Considere el automorfismo $\tau_{W_1W_2} : A^\mathbb{Z} \to A^\mathbb{Z}$ cuyo mapeo local $\mu : A^S \to A$ donde $S = \{i \in \mathbb{Z} : -2n \leq i \leq +3n - 1\}$ está dado por

$$\tau_{W_1W_2}(z)(0) = \begin{cases} (W_1)_l, & \text{si } z \in E_l(W_1), 0 \leq l < n, \\ \\ (W_2)_l, & \text{si } z \in E_l(W_2), 0 \leq l < n, \\ \\ z_0, & \text{si } z \in A^\mathbb{Z} \setminus \bigcup\limits_{0 \leq l < n} (E_l(W_1) \cup E_l(W_2)). \end{cases}$$

para cada $z \in A^\mathbb{Z}$.

Observe que este automorfismo escanea una ventana de longitud $5n$; si encuentra un marco con bloque central W_1, reemplaza dicho bloque por W_2 y viceversa.

Para ver que $\tau_{W_1W_2} : A^\mathbb{Z} \to A^\mathbb{Z}$ está bien definido, supongamos lo contrario, es decir, que existen dos marcos M_1 y M_2 tales que $M_1[-2L, 3L-1-k] = M_2[-2L+k, 3L-1]$ para alguna $0 < k < L$. Ya que $W_1^\infty \in Q_n$, se sigue que W_1 ocurre en W_1W_1 solo como su primera o segunda mitad, además, W_2 no ocurre en W_1W_1 pues ninguna permutación cíclica de W_1 es igual a W_2; se sigue que M_1 y M_2 deben ser de la forma $W_1W_2W_1W_2W_1$ o $W_2W_1W_2W_1W_2$. Luego, la superposición de M_1 y M_2 implica que $(W_1W_2)^\infty$ tiene periodo menor que $2n$, contradiciendo el hecho de que $(W_1W_2)^\infty \in Q_{2n}$.

Por construcción, el automorfismo $\tau_{W_1W_2}$ preserva marcos y es una involución. Si $z \in Q_k$ con $k < n$ entonces ningún elemento de $M(W_1, W_2)$ ocurre en z, pues de lo contrario $W_1^\infty, W_1^\infty \notin Q_n$; luego y $\tau_{W_1W_2}(z) = z$. Si $z \in Q_n$ es tal que no está en la órbita de x ni en la órbita de y, entonces z está dado por una palabra de longitud n diferente de cualquier permutación cíclica de W_i, $i = 1, 2$ y por lo tanto, nuevamente ningún elemento de $M(W_1, W_2)$ ocurre en z y $\tau_{W_1W_2}(z) = z$. ■

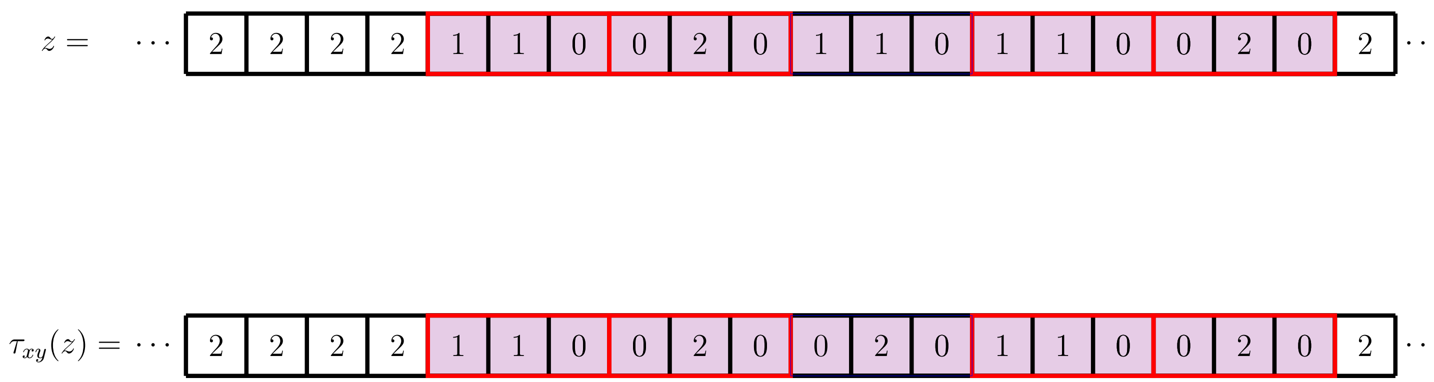
Ejemplo. Consideremos $A = \{0, 1, 2\}$ y los puntos de periodo fundamental $3\mathbb{Z}$ en $A^\mathbb{Z}$:

$$x = 110^{\infty} = \cdots 11011011.0110110\cdots$$

y

$$y = 020^{\infty} = \cdots 020020.020020\cdots .$$

Sea $\tau_{xy} \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ la involución que intercambia a x y y. La siguiente figura ilustra cómo mapea τ_{xy}.



Lema 5.4.2. *Para dos enteros $p \geq 3$ $m \geq 2$ se cumple la relación $m^p > m + p$.*

Demostración. Si $m = 2$ y $p = 3$ la afirmación se cumple pues $2^3 > 2 + 3$. Ahora supongamos que para dos enteros $q \geq 3$ y $\ell \geq 2$ se tiene que $\ell^q > \ell + q$. Entonces por un lado se cumplen las siguientes relaciones

$$(\ell + 1)^q > \ell^q + 1^q > (\ell + 1) + q,$$

pero también tenemos que

$$\ell^{(q+1)} > \ell^2 + \ell q \geq 2\ell + 2q > \ell + (q + 1).$$

Y el resultado se sigue por el principio de inducción doble. ■

Teorema 5.4.2. *Sea A un conjunto finito con $|A| \geq 2$. Entonces el grupo $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ no es finitamente generado.*

*Demostración.*Para cada $n \in \mathbb{N}$, el grupo $n\mathbb{Z}$ es un subgrupo del grupo aditivo $(\mathbb{Z}, +)$; este grupo es tal que todos sus subgrupos son de índice finito (de hecho el único grupo infinito que cumple con esta característica), al ser abeliano todos estos son normales. Ahora, por aplicación del Lema 5.4.2, para todo primo $p \geq 3$ se cumple que $|A|^p - |A| > p$. Sin embargo, por el inciso 2 del Lema 3.3.6 esta última relación significa que $\psi_{p\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, A) > [\mathbb{Z}, p\mathbb{Z}]$ para cada primo $p \geq 3$. Sea $\mathcal{F} := \{p\mathbb{Z} : \ p \text{ es primo}\}$. Por el Teorema 5.4.1 para cada primo p, dadas dos configuraciones $x, y \in \Psi_{p\mathbb{Z}}$, existe una involución $\tau_{xy} \in \mathrm{Aut}(A^G)$ que las intercambia respecto a $\mathcal{F}$. El resultado se sigue del Teorema 5.3.1. ■

5.5. Inducción y restricción de autómatas celulares

En el artículo [CC09] los autores estudian en detalle las nociones de inducción y restricción de autómatas celulares. Para el desarrollo del presente trabajo, son de interés los teoremas que permiten extender autómatas celulares a un supergrupo y las propiedades de estabilidad, por ejemplo, si el autómata original es invertible, entonces el autómata inducido (extendido) también lo será.

Sean G un grupo, H un subgrupo de G y A un conjunto. Definamos el conjunto

$$\mathrm{CA}(G,H;A) := \{\tau \in \mathrm{CA}(A^G) : \ \tau \text{ admite un conjunto memoria de que está contenido en } H\}.$$

Observe que, en particular, el conjunto memoria minimal de cada elemento de $\mathrm{CA}(G,H;A)$ está contenido en H.

Consideremos un autómata $\tau \in \mathrm{CA}(G,H;A)$ con conjunto memoria $S \subseteq H$ y mapeo local $\mu : A^S \to A$. Entonces, el mapeo $\tau_H : A^H \to A^H$ definido mediante

$$\tau_H(x)(h) = \mu((h^{-1} \cdot x)|_S) \text{ para toda } x \in A^H, \ h \in H,$$

es un autómata celular sobre A^H, denominado la *restricción* de τ a H.

Observe que el mapeo τ_H está bien definido pues no depende de la elección del conjunto memoria. En efecto, si consideramos $\widetilde{x} \in A^G$ tal que $\widetilde{x}|_H = x$, entonces

$$\tau_H(x)(h) = \tau(\widetilde{x}), \text{ para toda } h \in H.$$

Recíprocamente, podemos considerar un autómata celular $\sigma : A^H \to A^H$ con conjunto memoria S y mapeo local $\mu : A^S \to A$. El mapeo $\sigma^G : A^G \to A^G$ definido mediante

$$\sigma^G(\widetilde{x})(g) = \mu\left((g^{-1} \cdot \widetilde{x})|_S\right) \text{ para toda } \widetilde{x} \in A^G, \ g \in G,$$

es un autómata celular sobre A^G. Además, si S_0 es el conjunto memoria minimal de σ y $\mu_0 : A^{S_0} \to A$ el mapeo local, entonces $\mu = \mu_0 \circ \pi$, donde $\pi : A^S \to A^{S_0}$ es el mapeo restricción. Luego, se cumplen las relaciones

$$\sigma^G(\widetilde{x})(g) = \mu\left((g^{-1} \cdot \widetilde{x})|_S\right) = \mu_0 \circ \pi\left((g^{-1} \cdot \widetilde{x})|_S\right) = \mu_0\left((g^{-1} \cdot \widetilde{x})|_{S_0}\right),$$

para toda $\widetilde{x} \in A^G$ y $g \in G$. Esto implica, en particular, que σ^G no depende de la elección del conjunto memoria $S \subseteq H$. Así, decimos que $\sigma^G \in \mathrm{CA}(G,H;A)$ es el autómata celular *inducido* por $\sigma \in \mathrm{CA}(A^H)$.

Las nociones de inducción y restricción de autómatas que admiten conjuntos memoria en el subgrupo H, son inversa una de la otra, es decir,

$$(\tau_H)^G = \tau, \ \text{y } (\sigma^G)_H = \sigma.$$

Un aspecto importante para este trabajo es la manera en que mapea el autómata inducido, es decir, dado un $\tau \in \mathrm{CA}(G,H;A)$, ¿cómo transforma τ una configuración $\widetilde{x} \in A^G$? Siguiendo a [Cec+10] comencemos por recordar que el conjunto de clases laterales izquierdas de H en G forman una partición de G, es decir,

$$G = \bigsqcup_{c \in G/H} c.$$

Así que, podemos identificar nuestro espacio de configuraciones mediante

$$A^G = \prod_{c \in G/H} A^c,$$

de tal manera que cada configuración es coloreada por clases laterales

$$\widetilde{x} = (\widetilde{x}|_c)_{c \in G/H}.$$

El siguiente paso es descomponer cada autómata como un producto de mapeos de las clases laterales. Primero observe que si $c \in G/H$ y $g \in c$, entonces $\tau(\widetilde{x})(g)$ depende solo de $\widetilde{x}|_c$. En efecto pues si S es un conjunto memoria para τ con $S \subseteq H$, entonces $gS \subseteq c$, así que la observación se sigue por el Lema 2.3.1. Así, podemos escribir

$$\tau = \prod_{c \in G/H} \tau_c,$$

donde $\tau_c : A^c \to A^c$ es el único mapeo que satisface $\tau_c(\widetilde{x}|_c) = (\tau(\widetilde{x}))\,|_c$.

Finalmente, discutimos la relación entre una autómata τ_H y un mapeo τ_c. Dado un conciente $c \in G/H$ y $g \in c$, consideramos la biyección $\phi_g : H \to c$ dada por $\phi_g(h) = gh$ para toda $h \in H$. Este a su vez, induce una biyección $\phi_g^* : A^c \to A^H$ dada por

$$\phi_g^*(x) = x \circ \phi_g, \tag{5.5.1}$$

para cada $x \in A^c$.

Con esto en mente, tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A^c & \xrightarrow{\tau_c} & A^c \\ {\scriptstyle \phi_g^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_g^*} \\ A^H & \xrightarrow[\tau_H]{} & A^H. \end{array}$$

Proposición 5.5.1. *Los mapeos τ_c y τ_H son conjugados por ϕ_g^*, es decir, se cumple la relación*

$$\tau_c = \left(\phi_g^*\right)^{-1} \circ \tau_H \circ \phi_g^*.$$

Demostración. Sea $x \in A^c$ y $\widetilde{x} \in A^G$ tal que $\widetilde{x}|_c = x$. Para cada $h \in H$ se cumplen las relaciones:

$$\begin{aligned} (\phi_g^* \circ \tau_c)(x)(h) &= \phi_g^* \left(\tau_c(x)\right)(h), \\ &= \left(\tau_c(x) \circ \phi_g\right)(h), \\ &= \tau_c(x)(gh), \\ &= \tau(\widetilde{x})(gh), \\ &= g^{-1} \cdot \tau(\widetilde{x})(h), \\ &= \tau(g \cdot \widetilde{x})(h). \end{aligned}$$

Además, para cada $h \in H$ tenemos que

$$g^{-1} \cdot \widetilde{x}(h) = \widetilde{x}(gh) = x(gh) = x \circ \phi_g(h),$$

lo cual significa que $g^{-1} \cdot \widetilde{x} \in A^G$ extiende a $x \circ \phi_g \in A^G$. Con lo cual tenemos que

$$(\phi_g^* \circ \tau_c)(x)(h) = \tau_H(x \circ \phi_g)(h) = \tau_H(\phi_g^*(x))(h) = (\tau_H \circ \phi_g^*)(x)(h).$$

Esta última relación implica que $\phi_g^* \circ \tau_c = \tau_H \circ \phi_g^*$ y la igualdad buscada se sigue de la biyectividad de ϕ_g^*. ■

Proposición 5.5.2. *Sea G un grupo y A un conjunto. Sea H un subgrupo de G y $\tau \in \mathrm{CA}(G, H; A)$. Denotemos por $\tau_H : A^H \to A^H$ la restricción de τ a H. Entonces se cumple lo siguiente:*

a) τ es inyectivo si y sólo si τ_H es inyectivo;

b) τ es sobreyectivo si y sólo si τ_H es sobreyectivo;

Demostración. En vista de que τ se puede identificar como el mapeo producto $\prod_{c \in G/H} \tau_c$, se sigue que τ es inyectivo (resp. sobreyectivo) si y solo si τ_c es inyectivo (resp. sobreyectivo) para cada $c \in G/H$. Además, de la relación $\tau_c = \left(\phi_g^*\right)^{-1} \circ \tau_H \circ \phi_g^*$ probada en la Proposición 5.5.1 y en vista de que ϕ_g^* es biyectivo se sigue que τ_c es inyectivo (resp. sobreyectivo) si y solo si τ_H es inyectivo (resp. sobreyectivo). Luego, τ es inyectivo (resp. sobreyectivo) si y solo si τ_H es inyectivo (resp. sobreyectivo). ■

Corolario 5.5.1. *Sea G un grupo y A un conjunto finito. Sea H un subgrupo de G y $\tau \in \mathrm{CA}(G, H; A)$. Denotemos por $\tau_H : A^H \to A^H$ la restricción de τ a H. Entonces $\tau \in \mathrm{ICA}(A^G)$ si y sólo si $\tau_H \in \mathrm{ICA}(A^H)$.*

Demostración. Se sigue del Teorema 5.5.2 y del Teorema de Curtis-Hedlund. ■

5.6. El grupo Aut $\left(A^G\right)$ no es finitamente generado.

Sean $\{G_i\}_{i=2}^d$ una familia finita de grupos finitamente generados y $\Gamma = \mathbb{Z} \times G_2 \times \cdots \times G_d$. En esta sección ofrecemos una demostración de que el grupo $\mathrm{Aut}(A^\Gamma)$ no es finitamente generado para A un conjunto finito con $|A| \geq 2$, obteniendo como corolario una solución al Problema 4 en el caso G abeliano. Grosso modo la demostración consiste en contrar una “copia” del full $\mathbb{Z}$-shift sobre A en el full Γ-shift sobre A y extender los automorfimos descritos en el Teorema 5.4.1 al full Γ-shift para entonces aplicar el Teorema 5.3.1. Los encajes entre dos full shifts sobre grupos distintos se formaliza utilizando la noción de autómatas celulares generalizados desarrollada en [Cas+23]. La noción de extensión que usaremos es la expuesta en la sección 5.5.

Lema 5.6.1. *Sea G un grupo y $H \leq G$. Entonces $x \in \mathrm{Fix}(H)$ si y sólo si x es constante en cada clase lateral derecha.*

Demostración. Sea $x \in \mathrm{Fix}(H)$. Entonces,

$$h \cdot x(g) = x(h^{-1}g) = x(g), \ \forall h \in H,$$

lo cual significa que $x(Hg) = \{x(g)\}$ para cada $g \in G$, en otras palabras, x es constante en cada elemento de $H \setminus G$.
Sea $x \in A^G$ tal que $|x(Hg)| = 1$ para cada $g \in G$. Entonces

$$h \cdot x(g) = x(h^{-1}g) = x(e \cdot g) = x(g), \ \forall g \in G, \ \forall h \in H,$$

y $x \in \mathrm{Fix}(H)$. ■

Lema 5.6.2. *Sean G y H grupos con $K \trianglelefteq G$. Si $\phi : H \to G$ es un epimorfismo, entonces este induce una correspondencia biyectiva entre los cocientes $\phi^{-1}(K) \setminus H$ y $K \setminus G$. En particular, $[H : \phi^{-1}(K)] = [G : K]$.*

Demostración. Consideremos el grupo cociente G/K y un el homomorfismo $\overline{\phi} : H \to G/K$ dado por $\overline{\phi}(g) = \phi(g)K$. Observe que $\mathrm{Ker}(\overline{\phi}) = \phi^{-1}(K)$. Ahora bien, la sobreyectividad de ϕ implica la sobreyectividad de $\overline{\phi}$ y se sigue por el primer teorema de isomorfía que $H/\phi^{-1}(K) \cong G/K$ vía $g\phi^{-1}(K) \mapsto \phi(g)K$. De donde se sigue que $[H : \phi^{-1}(K)] = |H/\phi^{-1}(K)| = |G/K| = [G : K]$. ■

Proposición 5.6.1. *Sean G, H dos grupos y $\phi : H \to G$ un homomorfismo sobreyectivo. El mapeo $\phi^\star : A^G \to A^H$ dado por $\phi^\star(x) = x \circ \phi$ es un mapeo continuo, inyectivo y ϕ-equivariante. Además, para un subgrupo normal $K \trianglelefteq G$ tenemos que $\phi^\star(\Psi_K) = \Psi_{\phi^{-1}(K)}$.*

Demostración. Observe que para todo $h \in H$ y $g \in G$ se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} h \cdot \phi^\star(x)(g) &= \phi^\star(x)(h^{-1}g) \\ &= x(\phi(h^{-1}g)) \\ &= (\phi(h) \cdot x)(\phi(g)) \\ &= \phi^\star(\phi(h) \cdot x)(g), \end{aligned}$$

lo cual nos dice que $\phi^\star$ es ϕ-equivariante.
Ahora si $h \in H$ tenemos que

$$(\pi_h \circ \phi^\star)(x) = \pi_{\phi(h)}(x),$$

luego el mapeo $\phi^\star : A^G \to A^H$ es continuo.

Por otro lado, si $x, y \in A^G$, tomando en cuenta la sobreyectividad de $\phi : H \to G$ se siguen las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned}
\phi^\star(x) = \phi^\star(y) &\Leftrightarrow x(\phi(h)) = y(\phi(h)) \text{ para toda } h \in H \\
&\Leftrightarrow x(g) = y(g) \text{ para toda } g \in G \\
&\Leftrightarrow x = y,
\end{aligned}$$

y el mapeo $\phi^\star : A^G \to A^H$ es inyectivo.

Para el último resultado consideremos un subgrupo $K \leq G$ y $x \in \phi^\star(\Psi_K) \subseteq A^H$. Entonces $x = \phi^\star(x')$ para algún $x' \in \Psi_K \subseteq A^G$. Veamos que $\text{Stab}(\phi^\star(x')) = \phi^{-1}(K)$. Si $\alpha \in \phi^{-1}(K)$, entonces en vista de que $\phi(\alpha) \in K$ se cumplen las relaciones

$$\alpha \cdot \phi^\star(x') = \phi^\star(\phi(\alpha) \cdot x') = \phi^\star(x'),$$

luego $\alpha \in \text{Stab}(\phi^\star(x'))$, así $\text{Stab}(\phi^\star(x')) \supseteq \phi^{-1}(K)$. Ahora observe que se cumplen las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned}
\beta \in \text{Stab}(\phi^\star(x')) &\Leftrightarrow \beta \cdot \phi^\star(x')(h) = \phi^\star(x')(h) \quad \forall h \in H \\
&\Leftrightarrow \phi^\star(x')(\beta^{-1}h) = \phi^\star(x')(h) \quad \forall h \in H \\
&\Leftrightarrow x'(\phi(\beta^{-1}h)) = x'(\phi(h)) \quad \forall h \in H \\
&\Leftrightarrow \phi(\beta) \cdot x'(\phi(h)) = x'(\phi(h)) \quad \forall h \in H \\
&\Leftrightarrow \phi(\beta) \cdot x'(g) = x'(g) \quad \forall g \in G \\
&\Leftrightarrow \phi(\beta) \in K \\
&\Leftrightarrow \beta \in \phi^{-1}(K),
\end{aligned}$$

por lo cual se sigue que $\text{Stab}(\phi^\star(x')) \subseteq \phi^{-1}(K)$. Esto muestra que $x \in \Psi_{\phi^{-1}(K)}$, y en consecuencia $\phi^\star(\Psi_K) \subseteq \Psi_{\phi^{-1}(K)}$.

Para demostrar que se cumple la otra contención consideremos $z \in \Psi_{\phi^{-1}(K)} \subseteq A^H$. Vamos a probar que $z \in \phi^\star(\Psi_K)$, es decir, que existe $z' \in \Psi_K \subseteq A^G$ tal que $\phi^\star(z') = z$. En primer lugar, sabemos que z es constante en clada clase lateral derecha de $\phi^{-1}(K)$ en H. Sea $T = \{h_i\}_{i \in I}$ un transversal de $\phi^{-1}(K) \setminus H$. Por el Lema 5.6.2 existe una correspondencia 1-1 entre los cocientes $\phi^{-1}(K) \backslash H$ y $K \backslash G$ vía la asignación $\phi^{-1}(K)g \mapsto K\phi(g)$. Así que vamos a construir la configuración z' coloreando los cocientes de $K\phi(g)$ precisamente según la asignación $\phi^{-1}(K)g \mapsto K\phi(g)$, es decir, definimos $z'(\alpha) = z(h_i)$ para cada $\alpha \in K\phi(h_i)$, $h_i \in T$. En particular, observe que se cumple la relación $\phi^\star(z')(h) = z'(\phi(h)) = z(h)$ para cada $h \in H$.
Finalmente se verifica que $z' \in \Psi_K$. En efecto, pues por definición z' es constante en cada clase lateral Kg, luego por el Lema 5.6.1 se sigue que $z' \in \text{Fix}(K)$, es decir $K \subseteq \text{Stab}(z')$. Ahora consideremos $\alpha \in \text{Stab}(z')$. Por sobreyectividad de ϕ, existe $h \in H$ tal que $\phi(h) = \alpha$. Así se cumplen las relaciones

$$
\begin{aligned}
\alpha \cdot z'(g) = z'(g),\ \forall\ g \in G &\Leftrightarrow z'(\alpha^{-1}g) = z'(g),\ \forall\ g \in G \\
&\Leftrightarrow z'(\phi(h^{-1})g) = z'(g),\ \forall\ g \in G \\
&\Leftrightarrow z(h^{-1}h^*) = z(h^*) \quad \forall h^* \in H \\
&\Leftrightarrow h \cdot z(h^*) = z(h^*) \quad \forall h^* \in H,
\end{aligned}
$$

sin embargo, la última relación implica que $h \in \phi^{-1}(K)$. Luego, $\alpha = \phi(h) \in K$ y $\mathrm{Stab}(z') \subseteq K$. Por lo tanto, $\Psi_{\phi^{-1}(K)} \subseteq \phi^\star(\Psi_K)$. ■

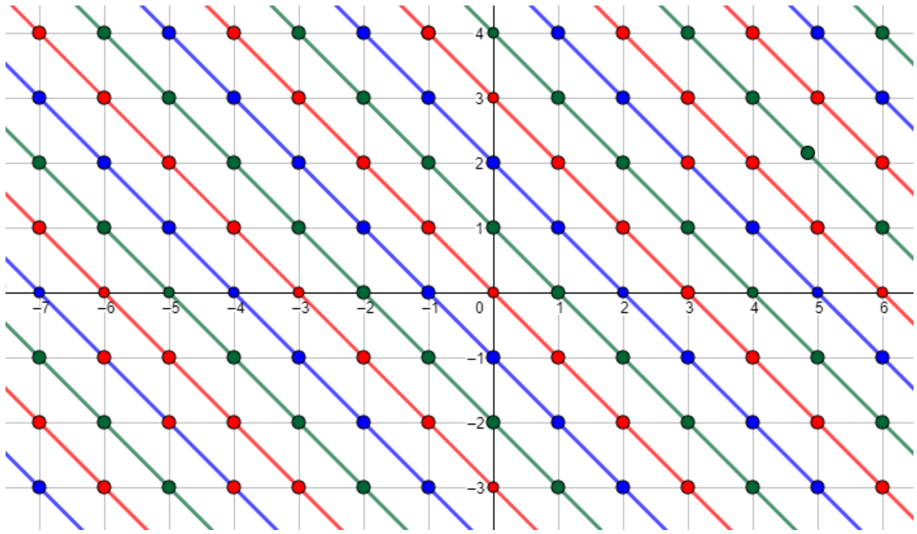
Ejemplo 5.6.1. Sea $A = \{0, 1\}$. Entonces el homomomorfismo sobreyectivo $\varphi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ dado por $\varphi(a, b) = a + b$ determina una copia del $\mathbb{Z}$-full shift con alfabeto A en el $\mathbb{Z}^2$-full shift con alfabeto A vía el φ-autómata celular $\phi^\star : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}^2}$, $\phi^\star = x \circ \varphi$ para toda $x \in A^{\mathbb{Z}}$. A continuación mostramos la imagen del punto $x = ...110110.110110... \in \Psi_{3\mathbb{Z}}$ bajo $\phi^\star$:

$110^\infty \longmapsto$

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
1	1	0	1	1	0	1	1	0	4
0	1	1	0	1	1	0	1	1	3
1	0	1	1	0	1	1	0	1	2
1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1	-1
1	1	0	1	1	0	1	1	0	-2
0	1	1	0	1	1	0	1	1	-3
1	0	1	1	0	1	1	0	1	-4

Sea $\Gamma_3 := \varphi^{-1}(3\mathbb{Z}) = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 :\ a + b \in 3\mathbb{Z}\}$. La configuración $\phi^\star(x)$ es de periodo fundamental Ψ_{Γ_3}. Tenemos que $[\mathbb{Z}^2 : \Gamma_3] = 3$, de modo que las tres clases laterales de Γ_3 en $\mathbb{Z}^2$ son $L_i = \{(a, b) :\ a + b \equiv i \pmod 3\}$ con $0 \leq i \leq 2$.

Geométricamente, cada L_i se visualiza en la retícula (vista en $\mathbb{R}^2$) como los puntos con coordenadas enteras contenidos en las rectas $x + y = 3k + i$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$. Una muestra de las clases laterales L_0, L_1 L_2 sería:



Es de notar que al comparar con la figura anterior podemos ver que la coloración de $\phi^\star(x)$ es tal que las clases laterales son constantes.

La siguiente proposición que aparece en [CS24] caracteriza la inyectividad y sobreyectividad de los autómatas celulares inducidos por homomorfismos.

Lema 5.6.3. *Sean G y H grupos y consideremos $\phi \in \mathrm{Hom}(H, G)$.*

1. ϕ es sobreyectivo si y sólo si $\phi^\star$ es inyectivo.

2. ϕ es inyectivo si y sólo si $\phi^\star$ es sobreyectivo.

Demostración. 1. Que la sobreyectividad de ϕ implica la inyectividad de $\phi^\star(x)$ se ha probado en la Proposición 5.6.1.

Ahora supongamos que ϕ no es sobreyectivo, entonces existe $g \in G \backslash \mathrm{Im}(\phi)$. Definamos $x, y \in A^G$ mediante $x(a) = y(a)$ para todo $a \in G - \{g\}$, $x(g) = 1$ y $y(g) = 0$. Claramente, $x \neq y$, pero para toda h,

$$\phi^\star(x)(h) = x(\phi(h)) = y(\phi(h)) = \phi^\star(y)(h).$$

Por lo tanto, $\phi^\star(x) = \phi^\star(y)$, lo cual muestra que $\phi^\star$ no es inyectivo.

2. Supongamos que ϕ es inyectiva. Sea $y \in A^H$ y consideremos la configuración $x \in A^G$ dada por

$$x(g) := \begin{cases} y(h), & \text{si } \exists h \in H \text{ tal que } g = \phi(h), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ya que ϕ es inyectiva, cada $g \in G$ tiene a lo más una preimagen en H bajo ϕ; luego el mapeo $x : G \to A$ está bien definido. Observe que para toda $h \in H$, se cumple $\phi^\star(x)(h) = x(\phi(h)) = y(h)$. Por lo tanto, $\phi^\star$ es sobreyectivo.

Ahora supongamos que ϕ no es inyectiva. Entonces existen $h_1, h_2 \in H$, $h_1 \neq h_2$ tales que $\phi(h_1) = \phi(h_2)$. Esto implica que para todo $x \in A^G$,

$$\phi^\star(x)(h_1) = x(\phi(h_1)) = x(\phi(h_2)) = \phi^\star(x)(h_2).$$

Por lo tanto, cualquier configuración $y \in A^H$ con $y(h_1) \neq y(h_2)$ está fuera de la imagen de $\phi^\star$, lo cual significa que no es sobreyectiva. ∎

Un ϕ-autómata celular $\tau : A^G \to A^H$ es *invertible* si existe un homomorfismo de grupos $\psi : G \to H$ y un ψ-autómata celular $\sigma : A^H \to A^G$ tal que $\tau \circ \sigma = \mathrm{Id}_{A^H}$ y $\sigma \circ \tau = \mathrm{Id}_{A^G}$. Cuando tal σ existe, escribimos $\tau^{-1} := \sigma$.

En [CS24] aparece el siguiente teorema el cual nos garantiza que al igual que con los autómatas celulares clásicos, los autómatas celulares generalizados invertibles sobre un alfabeto finito se caracterizan como aquellos que son biyectivos.

Teorema 5.6.1. *Sea A un conjunto finito. Un ϕ-autómata celular $\tau : A^G \to A^H$ es invertible si y sólo si es biyectivo.*

*Demostración.*Por definición si τ es invertible entonces debe ser biyectivo.

Ahora supongamos que τ es biyectivo y consideremos la función inversa $\tau^{-1} : A^H \to A^G$. Ya que τ es continuo, A^G es compacto y A^H Hausdorff, se sigue que τ^{-1} es continuo. Ahora por el Lema 5.6.3, $\phi : H \to G$ es un isomorfismo. Sean $y \in A^H$ y $g \in G$ arbitrarias. Entonces, existen $x \in A^G$ y $h \in H$ tales que $\tau(x) = y$ y $\phi(g) = h$. Ya que τ es ϕ-equivariante, tenemos que

$$h \cdot \tau(x) = \tau(\phi(h) \cdot x).$$

Aplicando τ^{-1} en la relación anterior y haciendo las sustituciones $x = \tau^{-1}(y)$ y $h = \phi^{-1}(g)$, obtenemos

$$\tau^{-1}(\phi^{-1}(g) \cdot y) = g \cdot \tau^{-1}(y).$$

Se sigue que τ^{-1} es ϕ^{-1}-equivariante. Por lo tanto, τ^{-1} es un ϕ^{-1}-autómata celular por el Teorema 4.1.1. ■

Corolario 5.6.2. *Sean G y H grupos. Si $\phi : H \to G$ es un isomorfismo, entonces $\phi^\star$ es un ϕ-autómata celular invertible y su inverso es un ϕ^{-1}-autómata.*

Proposición 5.6.2. *Sean G, H grupos y A un conjunto finito. Si $\varphi : H \to G$ es un monomorfismo, entonces todo autómata celular $\tau \in \mathrm{Aut}(A^H)$ induce un autómata celular invertible sobre A^G.*

Demostración. Consideremos el isomorfismo $\phi : H \leftrightarrow \varphi(H)$ inducido por φ, es decir, que asigna $h \mapsto \varphi(h)$. Por el Corolario 5.6.2 el correspondiente mapeo $\phi^\star : A^{\varphi(H)} \to A^H$ es un ϕ-autómata celular invertible. Así, dado $\tau \in \mathrm{Aut}(A^H)$ podemos considerar el mapeo $\overline{\tau} : A^{\varphi(H)} \to A^{\varphi(H)}$ dado por $\overline{\tau} = (\phi^\star)^{-1} \circ \tau \circ \phi^\star$. Ahora observe que $\overline{\tau}$ es homeomorfismo al ser composición de homeomorfismos. Además, por el Corolario 5.6.2 el mapeo $(\phi^\star)^{-1}$ es ϕ^{-1}-equivariante, así que para cada $h \in H$ se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned}
\phi(h) \cdot \overline{\tau}(y) &= \phi(h) \cdot ((\phi^\star)^{-1} \circ \tau \circ \phi^\star)(y) \\
&= (\phi^\star)^{-1}(h \cdot \tau(\phi^\star(y))) \\
&= (\phi^\star)^{-1}(\tau(h \cdot \phi^\star(y))) \\
&= (\phi^\star)^{-1}(\tau(\phi^\star(\phi(h) \cdot y))) \\
&= \overline{\tau}(\phi(h) \cdot y),
\end{aligned}$$

lo cual significa que $\overline{\tau}$ es un mapeo $\varphi(H)$-equivariante, y por lo tanto, un autómata celular invertible sobre $A^{\varphi(H)}$. Ahora, para cada $\tau \in \mathrm{Aut}(A^H)$ podemos considerar el mapeo $\overline{\tau}^G \in \mathrm{CA}(G, \varphi(H); A)$ inducido por $\overline{\tau} \in \mathrm{ICA}(A^{\varphi(H)})$. Finalmente, observe que por el Corolario 5.5.1, en vista de que $\overline{\tau} \in \mathrm{ICA}(A^{\varphi(H)})$ y A es finito tenemos que $\overline{\tau}^G \in \mathrm{Aut}(A^G)$. ■

El siguiente diagrama conmutativo ilustra la construcción de la demostración de la Proposición 5.6.2:

$$\begin{array}{ccc} A^{\varphi(H)} & \xrightarrow{\overline{\tau}} & A^{\varphi(H)} \\ {\scriptstyle \phi^\star}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \phi^\star} \\ A^H & \xrightarrow[\tau]{} & A^H. \end{array}$$

Proposición 5.6.3. *Sean G, H grupos y $\mathcal{F} = \{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subgrupos normales de H, todos de índice finito. Sea $\varphi : H \to G$ un monomorfismo y sea $\phi : H \to \varphi(H)$ el isomorfismo inducido por φ. Un automorfismo $\tau \in \mathrm{Aut}(A^H)$ intercambia dos configuraciones $x, y \in \Psi_{H_\ell}$ con respecto a $\mathcal{F}$ si y sólo si el automorfismo $\overline{\tau} : A^{\varphi(H)} \to A^{\varphi(H)}$ dado por $\overline{\tau} = (\phi^\star)^{-1} \circ \tau \circ \phi^\star$ intercambia las configuraciones $(\phi^\star)^{-1}(x), (\phi^\star)^{-1}(y) \in (\phi^\star)^{-1}(\Psi_{H_\ell}) = \Psi_{\phi(H_\ell)}$ con respecto a $\{\phi(H_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración. Supongamos que para algún $\ell \in \mathbb{N}$ existen dos configuraciones $x, y \in \Psi_{H_\ell}$ y un automorfismo $\tau \in \mathrm{Aut}(H)$ que las intercambia con respecto a $\mathcal{F} = \{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; esto es, $\tau(x) = y$ $\tau(y) = x$ y para cada $i \leq \ell$, τ fija las configuraciones en Ψ_{H_i} que no pertenecen a la H-órbita de x o de y.

Sea $\overline{\tau} : A^{\varphi(H)} \to A^{\varphi(H)}$ el automorfismo dado por $\overline{\tau} = (\phi^\star)^{-1} \circ \tau \circ \phi^\star$, entonces se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \overline{\tau}((\phi^\star)^{-1}(x)) &= \left((\phi^\star)^{-1} \circ \tau \circ \phi^\star\right)((\phi^\star)^{-1}(x)) \\ &= \left((\phi^\star)^{-1} \circ \tau\right)(x) \\ &= (\phi^\star)^{-1}(\tau(x)) \\ &= (\phi^\star)^{-1}(y), \end{aligned}$$

y análogamente tenemos que $\overline{\tau}((\phi^\star)^{-1}(y)) = (\phi^\star)^{-1}(x)$.

Al ser H_ℓ subgrupo normal de H, la Proposición 5.6.1 garantiza que $(\phi^\star)^{-1}(x), (\phi^\star)^{-1}(x) \in \Psi_{\phi(H_\ell)}$. Ahora notemos que τ fija una configuración $w \in A^H$ si y sólo si $\overline{\tau}$ fija a $(\phi^\star)^{-1}(w)$. En efecto, si τ fija a w, entonces

$$\overline{\tau}((\phi^\star)^{-1}(w)) = \left((\phi^\star)^{-1} \circ \tau \circ \phi^\star\right)((\phi^\star)^{-1}(w)) = (\phi^\star)^{-1}(\tau(w)) = (\phi^\star)^{-1}(w);$$

mientras que si $\overline{\tau}$ fija a $(\phi^\star)^{-1}(w)$ se cumple

$$\tau(w) = \left(\phi^\star \circ \overline{\tau} \circ (\phi^\star)^{-1}\right)(w) = \phi^\star(\overline{\tau}((\phi^\star)^{-1}(w)) = \phi^\star((\phi^\star)^{-1}(w)) = w.$$

Por otro lado, si dos configuraciones $w, z \in A^H$ son tales que la H-órbita de w no contiene a z, entonces para todo $h \in H$ tenemos que $h \cdot w \neq z$, así que por inyectividad de $(\phi^\star)^{-1}$ tenemos que $(\phi^\star)^{-1}(h \cdot w) \neq (\phi^\star)^{-1}(z)$, y por ϕ^{-1}-equivarianza de $(\phi^\star)^{-1}$ tenemos que $\phi^{-1}(h) \cdot (\phi^\star)^{-1}(w) \neq (\phi^\star)^{-1}(z)$, para toda $h \in H$. Pero al ser ϕ^{-1} isomorfismo tenemos que $(\phi^\star)^{-1}(z)$ no está en la $\varphi(H)$-órbita de $(\phi^\star)^{-1}(w)$. Análogamente, podemos demostrar que si $(\phi^\star)^{-1}(z)$ no está en la $\varphi(H)$-órbita de $(\phi^\star)^{-1}(w)$ entonces z no está en la H-órbita de w.

De lo descrito en los párrafos anteriores se sigue que para cada $i \leq \ell$, $\overline{\tau}$ fija las configuraciones en $\Psi_{\phi(H_\ell)}$ que no pertenecen a la $\phi(H)$-órbita de $(\phi^\star)^{-1}(x)$ o de $(\phi^\star)^{-1}(y)$ con respecto a $\{\phi(H_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y el resultado se sigue. $\blacksquare$

Definición 5.6.1. Consideremos una familia finita de grupos $\{G_1, ..., G_d\}$. Dada una configuración $x \in A^{G_1}$ diremos que $x' \in A^{G_1\times\cdots\times G_d}$ es la *extensión* de x sobre $G_1 \times \cdots \times G_d$ si $x'(g_1, ..., g_d) = x(g_1)$ para todo $(g_1, ..., g_d) \in G_1 \times \cdots \times G_d$.

Ejemplo 5.6.2. Sea $A = \{0, 1\}$. Para la configuración $x = 110^{\infty} = ...110110.110110110... \in A^{\mathbb{Z}}$ la correspondiente extensión de x sobre $\mathbb{Z}^2$ se muestra a continuación:

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
0	1	1	0	1	1	0	1	1	4
0	1	1	0	1	1	0	1	1	3
0	1	1	0	1	1	0	1	1	2
0	1	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1	1	-1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	-2
0	1	1	0	1	1	0	1	1	-3
0	1	1	0	1	1	0	1	1	-4

Observación 5.6.1. En realidad, x' corresponde a la imagen de x bajo $\phi^{\star} : A^{G_1} \to A^{G_1 \times \cdots \times G_d}$ donde $\phi : G_1 \times \cdots \times G_d \to G_1$ es el homomorfismo dado por la asignación $(g_1, ..., g_d) \mapsto g_1$. Además, si N es subgrupo normal de G_1, entonces $\phi^{-1}(N) = N \times G_2 \times \cdots \times G_d$ es subgrupo normal de $G_1 \times \cdots \times G_d$ y tenemos que $\phi^{\star}(\Psi_N) = \Psi_{\phi^{-1}(N)} = \Psi_{N \times G_2 \times \cdots \times G_d}$.

A continuación presentamos el resultado más importante de esta sección.

Teorema 5.6.3. *Sea $\{G_i\}_{i=2}^{d}$ una familia de grupos finitamente generados y A un conjunto finito con $|A| \geq 2$. Sea $\Gamma = \mathbb{Z} \times G_2 \times \cdots \times G_d$. El grupo $\mathrm{Aut}(A^{\Gamma})$ no es finitamente generado.*

Demostración. Consideremos el monomorfismo $\varphi : \mathbb{Z} \to \Gamma$ dado por $\varphi(k) = (k, e_2, ..., e_d)$ y sea $H = \varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \times \{e_2\} \times \cdots \times \{e_d\}$. Luego el isomorfismo $\overline{\varphi} : \mathbb{Z} \to H$ dado por $\overline{\varphi}(k) = \varphi(k)$ induce un $\overline{\varphi}$-autómata celular invertible $\overline{\varphi}^{\star} : A^H \to A^{\mathbb{Z}}$ dado por $\overline{\varphi}^{\star}(\overline{x}) = \overline{x} \circ \overline{\varphi} = x$. Por el Lema 5.6.2 cada autómata celular invertible $\tau \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ induce un autómata celular invertible $\overline{\tau}$ sobre A^H que puede extenderse a su vez a un autómata celular invertible $\overline{\tau}^{\Gamma}$ sobre A^{Γ}.

Ahora consideremos el epimorfismo $\phi : \Gamma \to \mathbb{Z}$ dado por $\phi(k, g_2, g_3, ..., g_d) = k$ para cada $(k, g_2, g_3, ..., g_d) \in \Gamma$. Por la Proposición 5.6.1 este epimorfismo nos proporciona una copia del full $\mathbb{Z}$-shift con alfabeto A en el full Γ-shift con alfabeto A vía el ϕ-autómata celular inyectivo $\phi^{\star} : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\Gamma}$ dado por $\phi^{\star}(x) = x \circ \phi$. Por la Observación 5.6.1 tenemos que $\phi^{\star}(A^{\mathbb{Z}})$ es el conjunto de extensiones de configuraciones en $A^{\mathbb{Z}}$ sobre Γ.

Sea $H_n := n\mathbb{Z} \times G_2 \times \cdots \times G_d$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así nuevamente por la Observación 5.6.1 tenemos que $\phi^{\star}(\Psi_{n\mathbb{Z}}) = \Psi_{\phi^{-1}(n\mathbb{Z})}$, es decir, conjunto de configuraciones de periodo fundamental $n\mathbb{Z} \times G_2 \times \cdots \times G_d$ corresponden exactamente a extensiones de configuraciones en $\Psi_{n\mathbb{Z}} \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ sobre Γ.

Denotemos por $S : \Gamma \times A^{\Gamma} \to A^{\Gamma}$ la acción shift. Por el Lema 5.6.2 tenemos que $[\Gamma : n\mathbb{Z} \times G_2 \times \cdots \times G_d] = [\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}] = n$; así que por la Proposición 5.3.1 para cada $n \in \mathbb{N}$ el par $\left(\Psi_{H_n}, S|_{\Psi_{H_n}}\right)$ es un subsistema finito de (A^{Γ}, S).

Por otro lado, observe que el conjunto $T = \{0\} \times G_2 \times \cdots \times G_d$ es un transversal de Γ / H. Denotemos por c_t la clase de equivalencia de t de Γ en H, es decir, $c_t = tH$. Para $t \in T$ consideremos el mapeo biyectivo $\rho_t : H \to c_t$ dado por $\rho_t(h) = th$ para toda $h \in H$ y la biyección $\rho_t^* : A^{c_t} \to A^H$ dada por $\rho_t^*(y) = y \circ \rho_t$. Con esto en mente, para cada $\overline{x} \in A^H$ y $t \in T$ definamos

$$\overline{x}_t = (\rho_t^*)^{-1}(\overline{x}) \in A^{c_t},$$

Sea $\widetilde{x} = (\overline{x}_t)_{t\in T}$. Entonces $\widetilde{x}(th) = \overline{x}(h) = x((\overline{\varphi})^{-1}(h))$ para cada $t \in T$ y $h \in H$, lo cual implica que $\widetilde{x}$ es la extensión de x sobre Γ. Ahora, según lo visto en la sección 5.5, para cada $\overline{\tau} \in \mathrm{Aut}(A^H)$ podemos identificar

$$\overline{\tau}^{\Gamma} = \prod_{t\in T} \overline{\tau}_{c_t},$$

de tal manera que, para cada $\overline{x} \in A^H$ se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} \overline{\tau}^{\Gamma}(\widetilde{x}) &= (\overline{\tau}_{c_t}(\overline{x}_t))_{t\in T} \\ &= \left([(\rho_t^*)^{-1} \circ \overline{\tau} \circ \rho_t^*](\overline{x}_t)\right)_{t\in T} \\ &= \left((\rho_t^*)^{-1}(\overline{\tau}(\overline{x}))\right)_{t\in T} \\ &= [(\overline{\tau}(\overline{x}))_t]_{t\in T} \\ &= \widetilde{\tau(x)}. \end{aligned} \tag{5.6.1}$$

Consideremos la familia de subgrupos de $\mathbb{Z}$ dada por $\mathcal{F} = \{n\mathbb{Z}\}_{n\in I}$, $I \subseteq \mathbb{N}$. Supongamos que para algún $k \in I$ el mapeo $\tau \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ es un automorfismo que intercambia dos configuraciones $x, y \in \Psi_{k\mathbb{Z}} \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ respecto a $\mathcal{F}$. Por la Proposición 5.6.3 se sigue que el mapeo $\overline{\tau}$ intercambia las configuraciones de periodo fundamental $H_k = k\mathbb{Z} \times \{e_2\} \times \cdots \times \{e_d\}$ $\overline{x} = (\overline{\varphi}^{\star})^{-1}(x)$ y $\overline{y} = (\overline{\varphi}^{\star})^{-1}(y)$ respecto a $\mathcal{F}' = \{H_i : \ i \in I\}$. Entonces la relación 5.6.1 nos asegura que $\overline{\tau}^{\Gamma}(\widetilde{x}) = \widetilde{\tau(x)} = \widetilde{y}$ y $\overline{\tau}^{\Gamma}(\widetilde{y}) = \widetilde{\tau(y)} = \widetilde{x}$. Por ϕ-equivarianza de $\phi^{\star}$ tenemos que, dado $z \in A^{\mathbb{Z}}$ se cumple que $\gamma \cdot \phi^{\star}(z) = \phi^{\star}(\phi(\gamma) \cdot z)$ para toda $\gamma \in \Gamma$ por lo que z pertenece a la $\mathbb{Z}$-órbita de $w \in A^{\mathbb{Z}}$ si y sólo si la extensión z sobre Γ pertenece a la Γ-órbita de la extensión de w sobre Γ. Ahora, para $i \in I$ tal que $i \leq k$ consideremos una configuración $w \in \Psi_{i\mathbb{Z}}$ que no pertenece a las órbitas de x y y, y sea $\widetilde{w} = \phi^{\star}(w)$, entonces $\overline{\tau}^{\Gamma}(\widetilde{w}) = \widetilde{\tau(w)} = \widetilde{w}$, ya que τ fija las configuraciones de periodo fundamental $i\mathbb{Z}$ para toda $i \in I$ con $i \leq k$. Por lo tanto, si un automorfismo $\tau \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ intercambia dos configuraciones $x, y \in \Psi_{n\mathbb{Z}} \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ respecto a $\mathcal{F}$, entonces $\overline{\tau}^{\Gamma}$ intercambia a $\widetilde{x}$ y $\widetilde{y}$ respecto a $\mathcal{F}'$.

Sea n un número primo con $n \geq 3$. Por el Teorema 5.4.1 dadas dos configuraciones $x, y \in \Psi_{n\mathbb{Z}} \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ existe una involución $\tau \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ que las intercambia respecto a $\mathcal{F} = \{p\mathbb{Z} : \ p \text{ es primo}, \ p \geq 3\}$, así por Corolario 5.5.1 el mapeo $\overline{\tau}^{\Gamma}$ es un autómata celular invertible, y por lo discutido en el párrafo anterior, $\overline{\tau}^{\Gamma}$ intercambia a las configuraciones $\widetilde{x}$ y $\widetilde{y}$ (de periodo fundamental H_n) respecto a $\mathcal{F}' = \{H_p : \ p \text{ es primo}, \ p \geq 3\}$.

Finalmente observe que al cumplirse las igualdades $[\Gamma : H_n] = [\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}]$ y $\phi^{\star}(\Psi_{n\mathbb{Z}}) = \Psi_{\phi^{-1}(n\mathbb{Z})}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\psi_{H_p} > [\Gamma : H_p]$ para todo primo p con $p \geq 3$. Por lo tanto, el resultado se sigue como una consecuencia del Teorema 5.3.1. ■

El siguiente diagrama ilustra una parte la construcción utilizada en el teorema anterior.

$$\begin{tikzcd}
A^{c_t} \arrow[r, "\overline{\tau}_{c_t}"] \arrow[d, "\rho_t^*"'] & A^{c_t} \arrow[d, "\rho_t^*"] \\
A^H \arrow[r, "\overline{\tau}"] \arrow[d, "\overline{\varphi}^{\star}"'] & A^H \arrow[d, "\overline{\varphi}^{\star}"] \\
A^{\mathbb{Z}} \arrow[r, "\tau"'] & A^{\mathbb{Z}}
\end{tikzcd}$$

Corolario 5.6.4. *Sea G un grupo abeliano infinito y A un conjunto finito con $|A| \geq 2$. El grupo* $\mathrm{Aut}(A^G)$ *no es finitamente generado.*

Demostración. Si G es un grupo abeliano que no es finitamente generado, entonces por la Proposición 5.2.2 $\mathrm{Aut}(A^G)$ no es finitemante generado. Si G es grupo abeliano infinito y finitamente generado, entonces por el Teorema de clasificación de grupos abelianos finitamente generados (ver Teorema 4.5.11 de [Lov15]) G es de la forma:

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{k\text{-veces}} \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k},$$

con $k \geq 1$ y m_{i+1} divisor de m_i. Entonces el resultado se sigue por el Teorema 5.6.3. ■

Capítulo 6

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo de tesis hemos presentado resultados de corte algebraico sobre tópicos en torno a sistemas full G shift con alfabeto finito A.

En el Capítulo 3 abordamos el problema de la determinación del número $\psi_H(G;A)$ de configuraciones en A^G de periodo fundamental H ($H \leq G$). Para ello partimos de dos observaciones clave. En primer lugar, este problema de conteo tiene sentido si y sólo si el índice de H en G es finito (Lema 3.3.2). Además, cuando G es finitamente generado, el poset $L(G)$ de todos los subgrupos de G de índice finito ordenados por inclusión constituye una retícula localmente finita (Lema 3.3.3)). Esto nos permite considerar la fórmula de inversión de Möbius para el poset $L(G)$ y obtenemos el siguiente resultado:

Teorema. *Sea G un grupo finitamente generado, sea H un subgrupo de G de índice finito, y sea A un conjunto finito. Entonces,*

$$\psi_H(G;A) = \sum_{H \leq K \leq G} \mu(H,K)|A|^{[G:K]}.$$

Encontramos que la cardinalidad del conjunto de configuraciones en A^G cuyo estabilizador es conjugado a H y la cardinalidad del conjunto de G-órbitas en él (denotados por $\psi_{[H]}(G;A)$ y $\alpha_{[H]}(G;A)$, respectivamente), están relacionados con el número de configuraciones de periodo mínimo H vía (Corolario 3.3.3):

$$\psi_{[H]}(G;A) = |[H]| \sum_{H \leq K \leq G} \mu(H,K)|A|^{[G:K]},$$

$$\alpha_{[H]}(G;A) = \frac{|[H]|}{[G:H]} \sum_{H \leq K \leq G} \mu(H,K)|A|^{[G:K]}.$$

Por otro lado, considerar un subgrupo $H \leq G$ normal es interesante, pues en este caso, existe una biyección G/H-equivariante entre $A^{G/H}$ y $\mathrm{Fix}(H)$, las configuraciones en $A^{G/H}$ con estabilizador trivial están en biyección con las configuraciones en $\mathrm{Fix}(H)$ con estabilizador trivial, es decir, con las configuraciones en A^G con periodo fundamental H. Entonces cuando H es subgrupo normal de índice finito tenemos que $\psi_H(G;A) = \psi_1(G/H;A)$, donde 1 denota el subgrupo trivial. Por lo tanto, el problema de la determinación de $\psi_H(G;A)$ ahora solo depende de la función de Möbius de la retícula de subgrupos del grupo finito G/H. De esta manera podemos explotar toda la maquinaria de funciones de Möbius que ha sido desarrollada para diversos grupos finitos. En particular, obtuvimos los siguientes resultados (Lema 3.3.6) para G un grupo finitamente generado, H un subgrupo normal de G de índice finito, y A un conjunto finito; donde además, p y p' son dos primos distintos y $n \in \mathbb{N}$:

1. Si $G/H \cong \mathbb{Z}_n$, entonces $\psi_H(G;A) = \sum_{d|n} \widetilde{\mu}(d)|A|^{n/d}$.

2. Si $G/H \cong \mathbb{Z}_{p^k}$, entonces $\psi_H(G;A) = |A|^{p^k} - |A|^{p^{k-1}}$.

3. Si $G/H \cong \mathbb{Z}_{pp'}$, entonces $\psi_H(G;A) = |A|^{pp'} - |A|^{p} - |A|^{p'} + |A|$.

4. Si $G/H \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, entonces $\psi_H(G;A) = |A|^{p^2} - (p+1)|A|^p + p|A|$.

Las fórmulas anteriores nos permiten realizar una inspección sobre los valores pequeños de $\alpha_{[1]}(G/H, A)$; y observando que $\alpha_{[1]}(G/H, A)$ es una función estrictamente creciente tanto en $[G : H]$ como en $|A|$, las situaciones en que ocurren quedan completamente clasificadas (excluyendo los casos triviales $H = G$ y $|A|$) en el siguiente teorema (Teorema 3.3.4).

Teorema. *Sea G un grupo finitamente generado, sea H un subgrupo normal propio de G de índice finito, y sea A un conjunto finito con al menos dos elementos.*

1. $\alpha_{[H]}(G;A) = 1$ *si y sólo si* $|A| = 2$ *y* $[G : H] = 2$.

2. $\alpha_{[H]}(G;A) = 2$ *si y sólo si* $|A| = 2$ *y* $[G : H] = 3$, *o* $|A| = 2$ *y* $G/H \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

3. $\alpha_{[H]}(G;A) = 3$ *si y sólo si* $|A| = 3$ *y* $[G : H] = 2$, *o* $|A| = 2$ *y* $G/H \cong \mathbb{Z}_4$.

4. $\alpha_{[H]}(G;A) = 6$ *si y sólo si* $|A| = 2$ *y* $[G : H] = 5$, *o* $|A| = 4$ *y* $[G : H] = 2$.

5. $\alpha_{[H]}(G;A) = 7$ *si y sólo si* $|A| = 2$ *y* $G/H \cong S_3$.

6. $\alpha_{[H]}(G;A) = 8$ *si y sólo si* $|A| = 3$ *y* $[G : H] = 3$.

7. $\alpha_{[H]}(G;A) = 9$ *si y sólo si* $|A| = 2$ *y* $G/H \cong \mathbb{Z}_6$.

8. $\alpha_{[H]}(G;A) = 10$ *si y sólo si* $|A| = 5$ *y* $[G : H] = 2$.

9. $\alpha_{[H]}(G;A) \neq 4$ *y* $\alpha_{[H]}(G;A) \neq 5$.

La filosofía detrás de los resultados del Capítulo 4 consiste en observar que los automorfismos del grupo G inducen automorfismos del monoide $\mathrm{CA}(A^G)$. Dado un automorfismo $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ consideramos el ϕ-autómata celular (generalizado) $\phi^\star : A^G \to A^G$ dado por $\phi^\star(x) = x \circ \phi$, el cuál a su vez da lugar al automorfismo $\phi_{\mathrm{CA}} : \mathrm{CA}(A^G) \to \mathrm{CA}(A^G)$ vía $\tau \mapsto (\phi^{-1})^\star \circ \tau \circ \phi^\star$. A continuación observamos que la asignación $\phi \mapsto \phi_{\mathrm{CA}}$ determina un homomorfismo de grupos $\Phi : \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{CA}(A^G))$. Por otro lado, logramos demostrar que cualquier automorfismo del monoide $\mathrm{CA}(A^G)$ que se genere mediante este mecanismo debe provenir de un automorfismo de G que fije los elementos del centro, lo cual queda plasmado en el siguiente teorema (Teorema 4.2.2).

Teorema. *Sea $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$. Si ϕ_{CA} es un automorfismo interno de $\mathrm{CA}(A^G)$, entonces $\phi(z) = z$, para todo $z \in Z(G) := \{z \in G : zg = gz, \forall g \in G\}$.*

Por lo tanto cuando G es abeliano, los automorfimos no triviales de G inducen automorfismos del monoide $\mathrm{CA}(A^G)$ que no son internos. En particular, el automorfismo $\tau_{rev} \in \mathrm{Aut}(\mathrm{CA}(A^{\mathbb{Z}}))$ dado por $\tau(x)(k) = x(-k)$, conocido como *regla espejo*, no es automorfismo interno (Corolario 4.2.3).

El teorema anterior, también nos permite demostrar que, cuando G es abeliano el grupo $\mathrm{Out}(\mathrm{CA}(A^G))$ de automorfimos externos de $\mathrm{CA}(A^G)$ tiene un subgrupo isomorfo a $\mathrm{Aut}(G)$ (Corolario 4.2.4). En este sentido proponemos la siguiente cuestión: ¿quizás bajo hipótesis adicionales, sea posible demostrar que $\mathrm{Out}(\mathrm{CA}(A^G))$ es isomorfo a $\mathrm{Aut}(G)$, o será a caso que siempre podemos encontrar un automorfismo externo de $\mathrm{CA}(A^G)$ que no sea inducido por un automorfismo de G?

Los resultados del Capítulo 5 están enfocados en demostrar que el grupo $\mathrm{Aut}(A^G)$ de automorfismos de un full shift A^G no es finitamente generado. Primeramente notamos que una condición necesaria para que $\mathrm{Aut}(A^G)$ sea finitamente generado es que A sea finito y G sea finitamente generado (Corolario 5.2.1). Por otro lado, cuando G es finitamente generado y posee una familia numerable $\mathcal{F} = \{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de subgrupos normales de índice finito, el estudio de la acción de los automorfismos del full shift A^G en el conjunto de órbitas de los subsistemas de puntos de perido fundamental H_i nos permite demostrar que $\mathrm{Aut}(A^G)$ no es finitamente generado, tal como queda asentado en el siguiente teorema (Teorema 5.3.1).

Teorema. *Sea G un grupo finitamente generado tal que pose una familia infinita numerable de subgrupos normales de índice finito $\mathcal{F} = \{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $\psi_{H_i} > [G : H_i]$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Sea A un conjunto finito con $|A| \geq 2$. Si para cada $i \in \mathbb{N}$ existe una involución $\tau_i \in \mathrm{Aut}(A^G)$ tal que intercambia dos configuraciones $x, y \in H_i$ con respecto a $\mathcal{F}$, entonces $\mathrm{Aut}(A^G)$ no es finitamente generado.*

Dados dos grupos G y H el concepto ad hoc para comparar la estructura de sistemas dinámicos topológicos entre dos full shifts A^G y A^H es el de autómata celular generalizado desarrollado en [CS24]. Más específicamente, nos interesa considerar el caso en que un shift contiene una copia del otro, y para tal objetivo usamos de nueva cuenta los autómatas celulares generalizados inducidos por homomorfismos. En particular, aquí señalamos que dado un epimorfismo de grupos $\phi : H \to G$, el correspondiente autómata $\phi^\star : A^G \to A^H$ definido por $\phi^\star(x) = x\circ\phi$ determina un homeomorfismo ϕ-equivariante entre los sistemas A^G y $\phi^\star(A^G)$. Además, para cada subgrupo normal $K \trianglelefteq G$ caracterizamos la imagen bajo $\phi^\star$ del conjunto de configuraciones de periodo fundamental K según lo indica la siguiente proposición (Proposición 5.6.1).

Proposición. *Sean G, H dos grupos y $\phi : H \to G$ un homomorfismo sobreyectivo. El mapeo $\tau : A^G \to A^H$ dado por $\tau(x) := \phi^\star(x) = x \circ \phi$ es un mapeo continuo, inyectivo y ϕ-equivariante. Además, para un subgrupo normal $K \trianglelefteq G$ tenemos que $\tau(\Psi_K) = \Psi_{\phi^{-1}(K)}$.*

Ahora bien, si A es un conjunto finito con al menos dos elementos y Γ un grupo que consiste en un producto directo finito de $\mathbb{Z}$, entonces el resultado más importante del Capítulo 5 (Teorema 5.6.3)nos asegura que el grupo $\mathrm{Aut}(A^\Gamma)$ de automorfismos del full shift A^Γ no es finitamente generado. Grosso modo, la idea de la demostración consiste en contrar una "copia" del full shift $A^{\mathbb{Z}}$ en el full shift A^Γ y extender los automorfimos descritos en el Teorema 5.4.1 al full Γ-shift para entonces aplicar el Teorema 5.3.1. En los siguientes párrafos damos una breve descripción de esta estrategia.

Dada una familia finita de grupos $\{G_1, ..., G_d\}$, introducimos el concepto auxiliar de *extensión* de una configuración $x \in A^{G_1}$ sobre el grupo $G_1 \times \cdots \times G_d$ como aquella configuración $x' \in A^{G_1\times\cdots\times G_d}$ tal que para toda $g \in G_1$ adopta el valor $x(g)$ en todo elemento del conjunto $\{g\} \times G_2 \times \cdots \times G_d$.

Observe que, en realidad, x' corresponde a la imagen de x bajo $\phi^\star : A^{G_1} \to A^{G_1\times\cdots\times G_d}$ donde $\phi : G_1 \times \cdots \times G_d \to G_1$ es el epimorfismo dado por la asignación $(g_1, ..., g_d) \mapsto g_1$; así que tal vez sea útil en el futuro considerar un concepto de ϕ-extensión. Entonces, según la proposición anterior, el conjunto de extensiones de configuraciones en $A^{\mathbb{Z}}$ sobre un producto directo $\Gamma := \mathbb{Z}\times G_2\times\cdots\times G_d$ donde $\{G_i\}_{i=2}^{d}$ es una familia de grupos finitamente generados constituye una "copia" del full shift $A^{\mathbb{Z}}$ en el full shit A^{Γ}.

Por otro lado, el concepto de inducción de autómatas celulares desarrollado en [CC09] nos permite extender los automorfimos descritos en el Teorema 5.4.1 al full Γ-shift. El primer paso es observar que al ser $\mathbb{Z} \times \{e_2\} \times \cdots \times \{e_d\}$ un subgrupo de Γ isomorfo a $\mathbb{Z}$, entonces cada automorfismo $\tau \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ induce un automorfismo de $\overline{\tau} \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}\times\{e_2\}\times\cdots\times\{e_d\}})$ (donde e_i es la identidad del grupo G_i) el cual a su vez puede extenderse a un automorfismo $\overline{\tau}^{\Gamma} \in \mathrm{Aut}(A^{\Gamma})$ (ver Proposición 5.6.2). Naturalmente los espacios $A^{\mathbb{Z}}$ y $A^{\mathbb{Z}\times\{e_2\}\times\cdots\times\{e_d\}}$ son conjugados vía el mapeo $\overline{\varphi}^\star : A^{\mathbb{Z}\times\{e_2\}\times\cdots\times\{e_d\}} \to A^{\mathbb{Z}}$ dado por $\overline{x} \mapsto x$, donde $\overline{x}(k, e_2, ..., e_d) = x(k)$ para toda $k \in \mathbb{Z}$, por lo cual no es difícil ver que un automorfismo $\tau \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ intercambia dos configuraciones $x, y \in \Psi_{n\mathbb{Z}}$ respecto a una familia de subgrupos $\mathcal{F} = \{i\mathbb{Z}\}_{i\in I}$, con $n \in I \subseteq \mathbb{N}$ si y sólo si $\overline{\tau}$ intercambia las configuraciones $\overline{x}, \overline{y} \in \Psi_{n\mathbb{Z}\times\{e_2\}\times\cdots\times\{e_d\}}$ respecto a $\mathcal{F}' = \{n\mathbb{Z}\times\{e_2\}\times\cdots\times\{e_d\}\}_{i\in I}$ (ver Proposición 5.6.3).

Finalmente para cada $\overline{\tau} \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}\times\{e_2\}\times\cdots\times\{e_d\}})$, podemos considerar el autómata celular inducido $\overline{\tau}^{\Gamma} \in \mathrm{ICA}(\Gamma, \mathbb{Z} \times \{e_2\} \times \cdots \times \{e_d\}; A)$ el cual es, de hecho, un automorfismo del full shift A^{Γ} (ver Corolario 5.5.1). Resulta que si $\tau \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ intercambia dos configuraciones $x, y \in \Psi_{n\mathbb{Z}} \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ respecto a $\mathcal{F}$, entonces $\overline{\tau}^{\Gamma}$ intercambia a $\widetilde{x}$ y $\widetilde{y}$ (sus respectivas extensiones sobre Γ) respecto a $\mathcal{F}'$. Así que, aplicando el Teorema 5.3.1 tenemos que el grupo $\mathrm{Aut}(A^{\Gamma})$ no es finitamente generado, obteniendo así el Teorema 5.6.3, el cual enunciamos a continuación.

Teorema. *Sea $\{G_i\}_{i=2}^{d}$ una familia de grupos finitamente generados y A un conjunto finito con $|A| \geq 2$. Sea $\Gamma = \mathbb{Z} \times G_2 \times \cdots \times G_d$. El grupo $\mathrm{Aut}(A^{\Gamma})$ no es finitamente generado.*

Una consecuencia inmediata de este resultado es que el grupo de automorfismos del full shift A^G donde G es un grupo abeliano no es finitamente generado (ver Corolario 5.6.4). Un siguiente objetivo sería responder ¿es porible demostrar que si $\mathbb{Z}$ es subgrupo de G, entonces el grupo $\mathrm{Aut}(A^G)$ no es finitamente generado? Otro caso interesante es considerar un grupo finitamente generado G con un conjunto infinito de subgrupos normales de índice finito, entonces el problema se reduce a la construcción de automorfismos que intercambien puntos periódicos. En general, la construcción de automorfismos de un full G shift es un área de oportunidad importante, varias propiedades del grupo de automorfismos del full shift $A^{\mathbb{Z}}$ se han determinado haciendo observaciones mediante automorfismos que se obtienen a partir de la construcción de "marcadores". Por otro lado, para grupos con pocos subgrupos normales de índice finito la estrategia general presentada aquí falla, pero podría ser interesante explorar la posibilidad de estudiar la acción del grupo de automorfismos en otra clase de subsistemas diferente a la de puntos de período mínimo.

Finalmente, destacar que los resultados presentados en el Capítulo 5 constituyen una aplicación de la emergente teoría de autómatas celulares generalizados, la cual si bien es interesante en sí misma, sin duda es una herramienta que tiene el potencial de desprender resultados de gran alcance cuando estudiamos shifts definidos sobre diferentes grupos.

Bibliografía

[BK87] Mike Boyle y Wolfgang Krieger. “Periodic points and automorphisms of the shift”. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 302.1 (1987), págs. 125-149.

[BLR88] Mike Boyle, Douglas Lind y Daniel Rudolph. “The automorphism group of a shift of finite type”. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 306.1 (1988), págs. 71-114.

[BS20] Mike Boyle y Scott Schmieding. “Symbolic dynamics and the stable algebra of matrices. arXiv e-prints, page”. En: *arXiv preprint arXiv:2006.01051* (2020).

[Cas+23] Alonso Castillo-Ramirez et al. “A generalization of cellular automata over groups”. En: *Communications in Algebra* 51.7 (2023), págs. 3114-3123.

[Cas22] Alonso Castillo-Ramirez. “On the minimal number of generators of endomorphism monoids of full shifts”. En: *Natural Computing* 21.1 (2022), págs. 31-38.

[CC09] Tullio Ceccherini-Silberstein y Michel Coornaert. “Induction and restriction of cellular automata”. En: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 29.2 (2009), págs. 371-380.

[CC12] Tullio Ceccherini-Silberstein y Michel Coornaert. “On the density of periodic configurations in strongly irreducible subshifts”. En: *Nonlinearity* 25.7 (2012), pág. 2119.

[Cec+10] Tullio Ceccherini-Silberstein et al. *Cellular automata*. Springer, 2010.

[CG19] Alonso Castillo-Ramirez y Maximilien Gadouleau. “Cellular automata and finite groups”. En: *Natural Computing* 18 (2019), págs. 445-458.

[CG20] Alonso Castillo-Ramirez y Maximilien Gadouleau. “Elementary, finite and linear vN-regular cellular automata”. En: *Information and Computation* 274 (2020), pág. 104533.

[CS24] Alonso Castillo-Ramirez y Luguis de los Santos Baños. “Further results on generalized cellular automata”. En: *Communications in Algebra* (2024), págs. 1-14.

[DFS18] José Luis Flores Dorado, Jónatan Herrera Fernández y Francisco Javier Turiel Sandín. *Introducción a la topología general*. Universidad de Málaga, 2018.

[DL23] Francesa Dalla Volta y Andrea Lucchini. “The A-Möbius function of a finite group”. En: *ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA* 23.3 (2023), P3-08.

[DZ21] Francesca Dalla Volta y Giovanni Zini. “On two Möbius functions for a finite non-solvable group”. En: *Communications in Algebra* 49.11 (2021), págs. 4565-4576.

[Epp15] Jeremias Epperlein. “Classification of elementary cellular automata up to topological conjugacy”. En: *International Workshop on Cellular Automata and Discrete Complex Systems*. Springer. 2015, págs. 99-112.

[FST19] Joshua Frisch, Tomer Schlank y Omer Tamuz. “Normal amenable subgroups of the automorphism group of the full shift”. En: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 39.5 (2019), págs. 1290-1298.

[GJS16] Su Gao, Stephen C Jackson y Brandon Seward. *Group colorings and Bernoulli subflows*. American Mathematical Soc., 2016.

[Hal50] Marshall Hall. “A topology for free groups and related groups”. En: *Annals of Mathematics* (1950), págs. 127-139.

[Hed69] Gustav A Hedlund. “Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system”. En: *Mathematical systems theory* 3.4 (1969), págs. 320-375.

[HKS22] Yair Hartman, Bryna Kra y Scott Schmieding. “The stabilized automorphism group of a subshift”. En: *International Mathematics Research Notices* 2022.21 (2022), págs. 17112-17186.

[KR90] Ki Hang Kim y Fred William Roush. “On the automorphism groups of subshifts”. En: *Pure Mathematics and Applications* 1.4 (1990), págs. 203-230.

[KRW92] KH Kim, FW Roush y JB Wagoner. “Automorphisms of the dimension group and gyration numbers”. En: *Journal of the American Mathematical Society* 5.1 (1992), págs. 191-212.

[LM21] Douglas Lind y Brian Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge university press, 2021.

[LM95] Douglas Lind y Brian Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. 1995.

[Lov15] Stephen Lovett. *Abstract algebra: structures and applications*. CRC press, 2015.

[Moi13] Edwin E Moise. *Geometric topology in dimensions 2 and 3*. Vol. 47. Springer Science & Business Media, 2013.

[Pah93] Herbert Pahlings. “On the Möbius function of a finite group”. En: *Archiv der Mathematik* 60 (1993), págs. 7-14.

[Rom11] Steven Roman. *Fundamentals of group theory: an advanced approach*. Springer Science & Business Media, 2011.

[Rot64] Gian-Carlo Rota. “On the foundations of combinatorial theory: I. Theory of Möbius functions”. En: *Classic Papers in Combinatorics*. Springer, 1964, págs. 332-360.

[Rya72] J Patrick Ryan. “The shift and commutativity”. En: *Mathematical systems theory* 6.1-2 (1972), págs. 82-85.

[Sta11] Richard P Stanley. “Enumerative Combinatorics Volume 1 second edition”. En: *Cambridge studies in advanced mathematics* (2011).

[Yan21] Kitty Yang. “Normal amenable subgroups of the automorphism group of sofic shifts”. En: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 41.4 (2021), págs. 1250-1263.