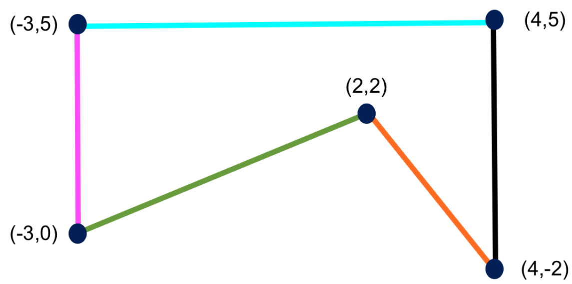
Banco de Ejercicios

Doctorado en Ciencias Físico -Matemáticas
Orientación en matemáticas
Centro Universitario de los Valles

Índice

1. Cálculo y Ecuaciones diferenciales.

1. Determina el área de la figura



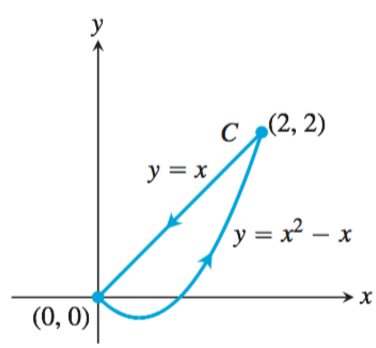
haciendo uso de la integral doble en coordenadas cartesianas con el orden de los diferenciales $dy\ dx$.

2. Determina el área de la figura anterior haciendo uso de la integral doble en coordenadas cartesianas con el orden de los diferenciales $dx\ dy$.

3. Aplica el teorema de Green para calcular la integral de línea del campo vectorial

$$\overline{F} = x^2 y \hat{\imath} + \frac{1}{2} x^3 y^2 \hat{\jmath}$$

a lo largo de la curva



4. Verifica el teorema de Green

$$\oint_C M dy - N dx = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy$$

donde recuerda que la curva debe estar orientada en sentido anti-horario. Para el campo vectorial

$$\overline{F} = (4x - 2y)\hat{\imath} + (2x - 4y)\hat{\jmath}$$

a lo largo de la curva parametrizada por

$$\begin{aligned} x &= 4+3\cos\theta, \qquad \theta\in[0,2\pi] \\ y &= -2+3\sin\theta \end{aligned}$$

5. Evalúa cada una de los siguientes integrales a lo largo de la curva

$$\overline{r}(t) = t\hat{i} - \hat{j} + t^2\hat{k}, \qquad 0\leq t\leq 1$$

   a) $\displaystyle\int_C (x+y-z)dx,$
   considerando que la curva comienza en (0,-1,0) y termina en (1,-1,1)

   b) $\displaystyle\int_C (x+y-z)dz,$
   considerando que la curva comienza en (1,-1,1) y termina en (0,-1,0)

6. Traza la región de integración y escriba una integral doble equivalente

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} 3y dx dy$$

7. Integre $f(x,y) = x + y^2$ sobre la región triangular con vértices (0,0), (1,0) y (0,1).

8. Trace la región de integración sobre la cual está definida la siguiente integral, no olvide escribir las expresiones algebraicas que definen la región y su dominio de definición

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx.$$

9. A partir de la definición

$$\kappa(t) = \frac{\|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{v}\|^3}.$$

   Demuestre que la curvatura de la curva con parametrización $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$ en el plano está dada por

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

   donde los puntos indican derivadas respecto a t.

10. Verifique el teorema de Green

$$\oint_C (Mdx + Ndy) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$$

   para el campo vectorial

$$\boldsymbol{F} = (x+y)\boldsymbol{i} - \left(x^2+y^2\right)\boldsymbol{j}$$

   y la región R acotada por las rectas $x=1$, $x=3$, $y=2$ y $y=5$.

11. Determine si el campo $\boldsymbol{F}$ es conservativo, y si es así, encuentre su función potencial.

$$\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$$

12. Verifique que

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C$$

es la función potencial del campo vectorial

$$\boldsymbol{F} = (e^x \cos y + yz)\,\boldsymbol{i} + (xz - e^x \sin y)\,\boldsymbol{j} + (xy + z)\boldsymbol{k}$$

13. Muestre que

$$\nabla \cdot (f\overline{F}) = f\nabla \cdot \overline{F} + \overline{F} \cdot \nabla f$$

donde $f = f(x, y, z)$ es una función escalar y $\overline{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es un campo vectorial con $F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)$.

14. Calcula la integral de línea

$$\oint \overline{F} \cdot d\overline{r}$$

del campo vectorial

$$\overline{F} = \nabla(x^2 - 4xy^3)$$

del punto (1,3) al punto (5,0) considerando que el campo $\overline{F}$ es un campo conservativo.

15. Encuentre la derivada de la función en P_0 en la dirección de $\boldsymbol{A}$.

$$h(x, y, z) = \cos xy + e^{yz} + \ln zx, \qquad P_0(1, 0, 1/2), \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

16. Obtenga el gradiente

$$\nabla_\xi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial \xi_2}\boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial \xi_3}\boldsymbol{v}_3 \tag{1}$$

en coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z. \tag{2}$$

17. Determine tres números reales cuya suma sea 9 y que la suma de sus cuadrados sea lo más pequeña posible.

18. Use la transformación

$$u = x - y, \qquad v = 2x + y$$

para evaluar la integral

$$\iint_R \left(2x^2 - xy - y^2\right) dxdy$$

para la región R del primer cuadrante, acotada por las rectas $y = -2x + 4$, $y = -2x + 7$, $y = x - 2$ y $y = x + 1$.

19. $\displaystyle\int e^x \tan^{-1} e^x dx$

20. $\displaystyle\int \frac{e^{-2t+1}}{1 + e^{-2t+1}} dt$

21. $\displaystyle\int e^t \sqrt{\tan^2 e^t + 1} dt$

22. $\displaystyle\int e^{-2x} \sin 3x dx$

23. $\displaystyle\int x^5 e^{x^2} dx$

24. $\displaystyle\int e^\theta \sin(e^\theta) \cos^2(e^\theta) d\theta$

25. $\displaystyle\int \frac{dv}{v \ln v^{-3/2}}$

26. $\displaystyle\int x^2 \sin(2x^3)\ e^{\cos(2x^3)} dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x^{5/2} \csc^4(x^{5/2})}{x \cot^{5/2}(x^{5/2})} dx$

28. $\int z^{2/3}(z^{5/3}+1)^{2/3}dz$

29. $\int \sqrt{e^x}dx$

30. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-4x^2}}dx$

31. Use el teorema fundamental del cálculo para encontrar la derivada indicada

$$\frac{d}{dx}\int_x^9 \sqrt[3]{u^2+2}\,du$$

32. $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx$

33. $\int \frac{\csc\sqrt{x}\cot\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

34. $\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^{\frac{3}{2}}}dx$

35. $\int \frac{9x-8}{(x-3)(2x-5)}dx$

36. $\int \frac{4}{x^3\,(x^2+3)}dx$

37. $\int \frac{2t^3-t}{(t^2+9)^2}dt$

38. Considere la función $f(x)=\int_1^x \ln(2t+1)dt$. Encuentre el valor funcional indicado

a. $f(1)$

b. $f'(1)$

c. $f''(1)$

d. $f'''(1)$

39. Resuelva la ecuación diferencial dada

$$\frac{dy}{dx}=x^2\sin x$$

40. Resuelva la ecuación diferencial dada

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2+x)^2}{x^5}$$

41. $\displaystyle\int \frac{x}{(4x^2+3)^6}dx$

42. $\displaystyle\int \cos^4 x \sin x dx$

43. $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{4}{x}}}{x^2}dx$

44. $\displaystyle\int x^4 \sin x dx$

45. $\displaystyle\int e^{-2\theta} \cos\theta d\theta$

46. $\displaystyle\int e^{2t} \cos e^t dt$

47. $\displaystyle\int x^5 e^{-4x} dx$

48. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes acerca de la función $y = f(x)$, cuya gráfica se muestra a continuación, son ciertas y cuáles son falsas

a. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe.

b. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

c. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

d. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

e. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.

49. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes acerca de la función $y = f(x)$, cuya gráfica se muestra a continuación, son ciertas y cuáles son falsas

a. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe.

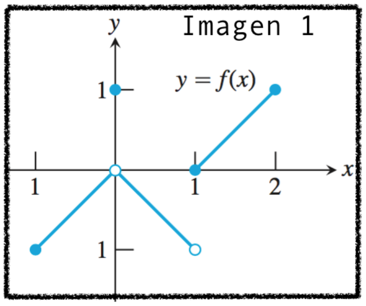
b. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$.

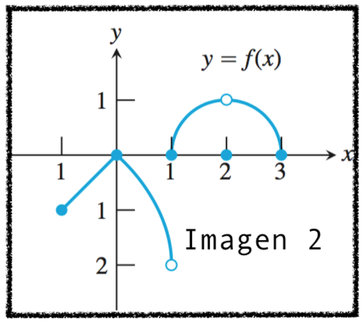
c. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe.

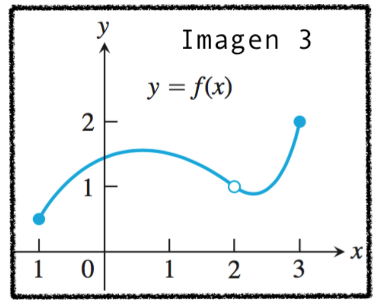
d. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe en cualquier punto x_0 en (-1,1).

e. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe en cualquier punto x_0 en (1,3).

50. Diga si la función graficada es continua en $(-1, 3)$. Si no lo es, explique dónde falla la continuidad y por qué.







51. Utilice la siguiente definición de derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

para encontrar la derivada de la función $f(x) = 3x^2 + \sqrt{x} - 2x + 3$.

52. Utilice la fórmula alternativa de la derivada

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

para encontrar la derivada de la función $f(x) = 3x^2 + \sqrt{x} - 2x + 3$.

53. Encuentre una expresión para la tangente a la curva $y = 4 - x^2$ en el punto (-1,3). Después trace la curva y la tangente juntas.

54. ¿Qué conjunto de funciones son linealmente independientes?

a) $\{\sin \pi, \cos \pi\}$

b) $\{e^x, 2e^x\}$

c) $\left\{e^{3x}, 5e^x\right\}$

d) $\{3x + 2, 6x + 4\}$

55. Resuelve la ecuación diferencial

$$y^{(4)} - 7y'' - 18y = 0$$

a) $y = C_1 e^{3x} + x C_2 e^{3x} + C_3 \cos \sqrt{2}x + C_4 \sin \sqrt{2}x$

b) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 \cos \sqrt{2}x + C_4 \sin \sqrt{2}x$

c) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$

d) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^x \left(C_3 \cos \sqrt{2}x + C_4 \sin \sqrt{2}x\right)$

56. Resuelve la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 7xy' + 16y = 0, \qquad\qquad y_1 = x^4$$

a) $y = C_1$

b) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + C_3\cos\sqrt{2}x + C_4\sin\sqrt{2}x$

c) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$

d) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + e^x\left(C_3\cos\sqrt{2}x + C_4\sin\sqrt{2}x\right)$

57. Elija la forma de la solución particular correspondiente a la ecuación diferencial $y''' - 3y'' = (3x+2)\,e^{3x}$

a) $y_p = \left(Ax^3 + Bx^2\right)e^{3x}$

b) $y_p = (Ax + Bx)\,e^{3x}$

c) $y_p = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{3x}$

d) $y_p = \left(Ax^2 + Bx\right)e^{3x}$

58. La solución general de la ecuación diferencial $y'' + y' - 2y = x^2 - 2x$ es

a) $y = C_1e^x + C_2xe^x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

b) $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

c) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

d) $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + x^2 - 2x$

59. Resuelve la ecuación $x^2y^2y' + 1 = y$

A) $\frac{y^2}{2} = 2\ln|y-1| + y = x + C$

B) $\frac{y^2}{2} + \ln|y-1| = \frac{1}{x} + C$

C) $\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = \frac{1}{x}$

D) $\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C$

60. Determine la función $M(x,y)$ para que la ecuación diferencial: $M(x,y)dx + (1 + \ln x - \ln y)\,dy = 0$ sea de **coeficientes homogéneos**.

A) $M(x,y) = e$

B) $M(x,y) = \ln x$

C) $M(x,y) = \ln y$

D) $M(x,y) = x - y$

61. Determine la solución general de la ecuación de coeficientes homogéneos $xy' = y + xe^{-\frac{y}{x}}$

A) $y = x\ln\left(\ln x^{-2} + C\right)$

B) $y = x\ln(\ln x + C)$

C) $y = x\ln\left(\ln x^2 + c\right)$

D) $y = x\ln\left(\ln x^3 + C\right)$

62. Determina la ecuación diferencial **No exacta**.

A) $(2y+x)\,dy+ydx=-x^2dx$

B) $\left(x^2+xy^2\right)dx+x^2ydy=2y^4dy$

C) $\left(x+y^3\right)dy+ydx=7x^2dx$

D) $\left(x-3y^3\right)dy+ydx=3y^3dx$

63. Dado el factor integrante $\mu(y)=\dfrac{2}{y}$, encuentre la solución de la ecuación diferencial $\left(6xy^2+2y\right)dx+\left(3x^2y+6y^2\right)dy=0$

A) $6x^2y+2xy+3y^3=C$

B) $6x^2y+4x+6y^2=C$

C) $\dfrac{9}{2}x^2y^2+2xy+3y^3=C$

D) $12x^2y+4x+12y=C$

2. Mecánica clásica

1. Encuentre la curva $y(x)$ que pasa a través de los puntos (0,0) y (1,1) y que minimiza el funcional

$$I[y] = \int_0^1 \left(y'^2 - y^2 \right) dx. \tag{1}$$

Solución : La curva que minimiza la funcional, es aquella que satisface las ecuaciones de Euler Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y'^2 - y^2 \right) - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}\left(y'^2 - y^2 \right) = 0$$

$$-2y - 2y'' = 0.$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden de coeficientes constantes cuya solución general es

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{2}x) + C_2 \cos(\sqrt{2}x).$$

Además sabemos que pasa a través de los puntos (0,0) y (1,1), esto es, $y(0) = 0$ y $y(1) = 1$ de donde podemos fijar las constantes C_1 y C_2

$$\begin{aligned} 0 = y(0) = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 \quad &\Rightarrow \quad C_2 = 0 \\ 1 = y(1) = C_1 \sin\sqrt{2} \quad &\Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{\sin\sqrt{2}} \end{aligned}$$

obteniendo la solución particular

$$y(x) = \frac{1}{\sin\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}x).$$

2. Encontrar el valor mínimo de la integral en (1).

Solución : Para encontrar el valor mínimo de la integral, remplazamos y por la curva encontrada

$$I[y] = \int_0^1 \left(\frac{2}{\sin^2\sqrt{2}} \cos^2(\sqrt{2}x) - \frac{1}{\sin^2\sqrt{2}} \sin^2(\sqrt{2}x) \right) dx.$$

3. Una partícula está sujeta al potencial $U(x) = -Fx$, donde F es una constante. La partícula viaja de $x = 0$ (en $t = 0$) a $x = a$ en un intervalo de tiempo t_0. Asuma que el movimiento de la partícula puede ser expresado de la forma

$$x(t) = A + Bt + Ct^2.$$

Encuentre los valores de las constantes A, B y C tales que la acción

$$S = \int_0^{t_0} L dt$$

donde L es el Lagrangiano, toma un valor mínimo.

Solución : Aplicando las condiciones inicial $x(0) = 0$ y final $x(t_0) = a$

$$\begin{aligned} 0 = x(0) = A + B(0) + C(0)^2 &\quad\Rightarrow\quad A = 0 \\ a = x(t_0) = Bt_0 + Ct_0^2 &\quad\Rightarrow\quad B = \frac{a}{t_0} - Ct_0 \end{aligned}$$

se tiene que el movimiento de la partícula es expresado por

$$x(t) = \left(\frac{a}{t_0} - Ct_0\right) t + Ct^2.$$

Recordemos que el Lagrangiano tiene la forma

$$L = T - U$$

donde $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ y $U = U(x)$ es la energía potencial. Así, considerando las ecuaciones de Euler Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + Fx\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + Fx\right) = 0$$

$$F - m\ddot{x} = 0.$$

Encontramos

$$F - m\frac{d^2}{dt^2}\left[\left(\frac{a}{t_0} - Ct_0\right) t + Ct^2\right] = 0$$

$$F - 2mC = 0$$

de aquí que $C = \dfrac{F}{2m}$ y por tanto $B = \dfrac{a}{t_0} - \dfrac{F}{2m}t_0$.

4. Obtenga la lagrangiana para un péndulo simple de masa m y longitud l y obtenga sus ecuaciones de movimiento.

5. Considere un péndulo doble de masas m_1 y m_2 y longitudes l_1 y l_2, que vibra en el plano vertical. Escribir la lagrangiana para el sistema y obtener las ecuaciones de movimiento para el sistema.

6. Considere un resorte vertical de constante k pegado al techo de masa M del cual cuelga un bloque de masa m. Si el bloque se pone en movimiento oscilatorio use las ecuaciones de Euler-Lagrange para mostrar que el sistema se mueve como un oscilador armónico simple con un período $2\pi\sqrt{(M+3m)/3k}$.

7. Una partícula se mueve en el plano xy bajo la influencia de un campo de fuerza central que depende solo de la distancia al origen. Calcular la Hamiltoniana para el sistema y las ecuaciones de Hamilton del mismo.

8. Si H es el Hamiltoniano de un determinado sistema, pruebe que si f es cualquier función que depende de la posición, del momento lineal y del tiempo, entonces se cumple que
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f],$$
donde $[a, b] = ab - ba$ denota al conmutador.

9. Considere una partícula de masa m inmersa en un campo de fuerzas generada por un potencial $V(q)$, siendo q la coordenada generalizada tipo espacio. Suponga que su Hamiltoniana es dada por
$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + V,$$
donde p es el momento lineal de la partícula y c es la velocidad de la luz. Obtener las ecuaciones de movimiento para esta partícula.

10. Dos bloques de concreto de masas m_1 y m_2 respectivamente estÃ¡n en contacto uno junto al otro sobre el suelo. Si no se considera la fricción del suelo y a uno de ellos se le aplica una fuerza horizontal de 3N, para $m_1 = 2\,kg$ y $m_2 = 1\,Kg$ calcular la fuerza de contacto entre los dos bloques.

11. Un cuerpo de masa m acelera uniformemente partiendo del reposo hasta alcanzar una rapidez v_f en el tiempo t_f. Demostrar que el trabajo efectuado sobre el cuerpo como una función del tiempo t, en términos de v_f y t_f es
$$\frac{1}{2}m\frac{v_f^2}{t_f^2}t^2$$

12. Una fuerza actúa sobre una partícula de $3\,Kg$, de tal manera que la posición de la partícula en función del tiempo está dada por $x = 3t - 4t^2 + t^3$ en donde x está dada en metros y t en segundos. Calcular el trabajo ealizado por la fuerza durante los primeros 4 segundos.

13. La función de la energía potencial de la fuerza que ejercen entre si dos átomos en una molécula diatómica es dada por

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6},$$

donde a y b son constantes positivas y x es la distancia interatómica. Mostrar que la fuerza entre los átomos tiene la forma

$$F = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}.$$

Además determine para que distancias los átomos se repelen y para cuales se atraen.

14. Un bloque de $1\,Kg$ choca contra un resorte horizontal sin peso, cuya constante elástica es de $2\,N/m$. El bloque comprime el resorte en $4\,m$ a partir de su posición relajada. Suponiendo que el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie horizontal es de 0.25. Calcular la rapidez del bloque en el instante de la colisión.

15. Un niño está sentado en la parte superior de un montón de hielo semiesférico. Se le da un pequeño empujón y comienza a deslizarse hacia abajo por el hielo. Demostrar que si el hielo no presenta fricción, el niño pierde contacto con la superficie a un punto cuya altura es de $\frac{2R}{3}$.

16. Dos resortes se encuentran unidos horizontalmente uno seguido de otro con constantes k_1 y k_2. Un extremo de los resortes esta fijo a la pared y el otro a un bloque de masa m que descansa sobre el suelo. Demostrar que la frecuencia de oscilación de m es dada por

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}.$$

3. Electromagnetismo

1. Una varilla delgada no conductora, de longitud l, tiene una carga total q distribuida de modo uniforme en toda su longitud. Demostrar que el valor del campo eléctrico E en un punto sobre la perpendicular al punto medio de la varilla es dado por
$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 y}\frac{1}{\sqrt{l^2+4y^2}}.$$

2. Considere una lámina cuadrada cargada de longitud infinita delgada y no conductora, cargada con una densidad superficial de carga eléctrica σ. Demostrar que el valor del campo eléctrico a una distancia r enfrente de la placa es
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

3. Considere un objeto en forma de pera rellena conductor y cargado eléctricamente con una densidad de carga superficial σ. Demostrar que el campo eléctrico en puntos situados a distancias cortas sobre su superficie es $E = \sigma/\epsilon_0$.

4. Considere dos cilindros concéntricos el interior de radio a y el exterior de radio b. Los cilindros tienen cargas por unidad de longitud iguales y de signos opuestos. Demostrar que el campo eléctrico entre los cilíndros es
$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}.$$

5. Un electrón de masa m y con cierta energía cinética T se lanza directamente hacia una gran placa metálica que tiene una densidad superficial de carga negativa σ. Calcular la distancia a la que debe lanzarse el electrón para que llegue justamente a la placa.

6. Una pequeña esfera cargada de masa m y carga eléctrica q está suspendida de un hilo de seda que forma un ángulo de 30° con respecto a una gran superficie conductora plana vertical cargada. Calcular la densidad superficial de carga σ de la superficie.

7. Considere una partícula de masa m cargada negativamente con carga q que se introduce en un campo magnético B de tal manera que su velocidad v es perpendicular a B. Demostrar que la partícula describe una trayectoria circular que recorre con una frecuencia angular dada por
$$\omega = \frac{qB}{m}$$

8. Use la ley de Ampere $\oint \bar{B}\cdot d\bar{l}$ para mostrar que el campo magnético de un cilindro de radio R a una distancia $r < R$, cuando el alambre transporta una corriente uniforme a través de su sección transversal i_0 tiene la forma
$$B = \frac{\mu_0 i_0 r}{2\pi R^2},$$

siendo μ_0 la constante de permitividad magnética.

9. Dos alambres paralelos separados por una distancia d transportan corrientes i en sentidos opuestos. Mostrar que el campo magnético en puntos intermedios entre los alambres que se encuentran a una distancia x de uno de ellos es dado por la fórmula

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right),$$

donde μ_0 es la constante de permitividad magnética.

10. Considere las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \bar{E} = 4\pi\rho, \\
&\nabla \cdot \bar{B} = 0, \\
&\nabla \times \bar{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0, \\
&\nabla \times \bar{B} = \frac{4\pi}{c}\bar{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Obtener a partir de estas ecuaciones la ecución para una onda electromagnética.

4. Álgebra Lineal

1. Demostrar que $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | f(1) = \bar{0}\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

2. Sea V un espacio vectorial cuyos elementos son matrices $n \times n$ sobre el campo F. Sea $B \in V$, ¿Es la función
$$T(A) = [A, B] = AB - BA, \quad A \in V,$$
una transformación lineal?. Justifique su respuesta.

3. Sea $\mathcal{L} = span\,\langle (1, 2, 3), (1, 1, 1) \rangle$. Calcular el valor de x tal que $(1, x, 5) \in \mathcal{L}$.

4. Determinar los valores de a y b, si es que existen, para que
$$span\,\langle (a, 1, -1, 2), (1, b, 0, 3) \rangle = span\,\langle (1, -1, 1, -2), (-2, 0, 0, -6) \rangle\,.$$

5. Obtener la representación matricial para la transformación de reflexión $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $(x, y) \mapsto T(x, y) = (x, -y)$.

6. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que
$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y - z \end{pmatrix}.$$
Obtener la representación matricial de T respecto a las bases
$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

7. Si A y B son subespacios vectoriales de un espacio vectorial V, demostrar que $A \cap B$ es subespacio vectorial de V.

8. Demostrar que el espacio de polinomios de grado n con coeficientes reales es isomorfo a $\mathbb{R}^{n+1}$ como espacio vectorial.

9. Determinar si la transformación $T : \mathbb{M}_{n\times n} \to \mathbb{M}_{n\times n}$ con $A \mapsto T(A) = AA^t$ es lineal, en donde $\mathbb{M}_{n\times n}$ es el espacio de matrices cuadradas de orden $n \times n$.

10. Determinar si las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
conforman una base para el espacio de matrices 2×2 con entradas reales $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

11. Sea $T : U \to V$ una transformación lineal con U, V espacios vectoriales sobre un campo F. Sean $\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n \in V$ tales que $\{T(\bar{v}_1), ..., T(\bar{v}_n)\}$ es un conjunto linelamente independiente. Demostrar que $\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n$ son linealmente independientes.

12. Calcular los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

en el campo de los números reales.

13. Calcular los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

en el campo de los números complejos.

14. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo F. Demostrar que V y W son isomorfos si y solo si $dim(V) = dim(W)$.

15. Demostrar que si A y B son dos matrices similares, entonces A y B tienen el mismo polinomio característico.

16. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T[(x, y, z, w)] = (x - y + z + w, x + 2z - w, x + y + 3z - 3w).$$

Obtener una base y la dimensión para la imagen de T.

17. Diagonalizar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

18. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$. Obtener una base para $ker(f)$.